2021年北京市海淀区高三一模数学试卷

2021.4

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，满分150分，考试时长120分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

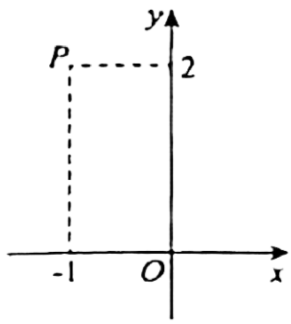
第I卷（选择题　共40分）

一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合$A=\{1\}$，$B=\{x\,|\,x\geq a\}$．若$A\cup B=B$，则实数a的取值范围是

A．$(-\infty,1)$　　B．$(-\infty,1]$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

2. 如图，在复平面内，复数z对应的点为P，则复数$\dfrac{z}{\mathrm{i}}$的虚部为



A．1　　B．-1　　C．2　　D．-2

3. 已知$\{a_n\}$为等差数列，S_n为其前n项和．若$a_5=S_5=5$，则$a_1=$

A．-5　　B．-4　　C．-3　　D．-2

4. 在$(x-\dfrac{a}{x})^6$的展开式中，x^4的系数为12，则a的值为

A．2　　B．-2　　C．1　　D．-1

5. 函数① $f(x)=\sin x+\cos x$，② $f(x)=\sin x\cos x$，③ $f(x)=\cos^2(x+\dfrac{\pi}{4})-\dfrac{1}{2}$中，周期是$\pi$且为奇函数的所有函数的序号是

A．①②　　B．②　　C．③　　D．②③

6. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且当 $x>1$时，$f(x)=\log_2 x$，则 $f(8)-f(-2)=$

A． -2　　B． -1　　C． 1　　D． 3

7. 已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是单位向量，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则$|\boldsymbol{c}|=$

A． 3　　B． $\sqrt{7}$　　C． $\sqrt{3}$　　D． $\sqrt{2}$

8. 已知点$A(x_1,x_1^2)$，$B(x_2,x_2^2)$，$C(0,\dfrac{1}{4})$，则“$\triangle ABC$是等边三角形”是“直线AB的斜率为0”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

9. 设无穷等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．若$-a_1<a_2<a_1$，则

A．$\{S_n\}$为递减数列　　B．$\{S_n\}$为递增数列

C．数列$\{S_n\}$有最大项　　D．数列$\{S_n\}$有最小项

10. 我国魏晋时期的数学家刘徽创造了一个称为“牟合方盖”的立体图形来推算球的体积．如图 1，在一个棱长为$2a$的立方体内作两个互相垂直的内切圆柱，其相交的部分就是牟合方盖，如图 2，设平行于水平面且与水平面距离为h的平面为α，记平面α截牟合方盖所得截面的面积为S，则函数$S=f(h)$的图象是

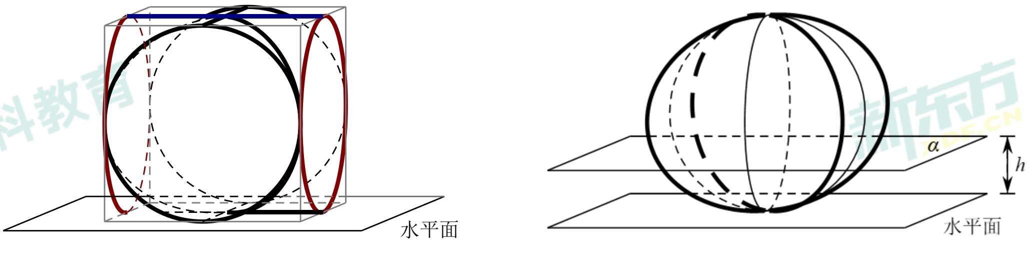
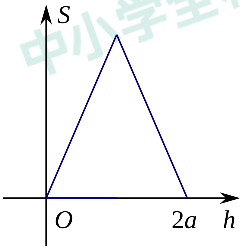
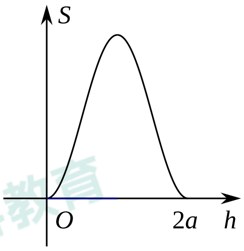


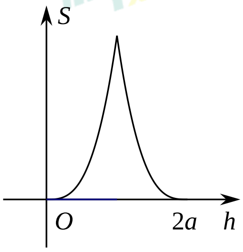
图 1　　　　图 2



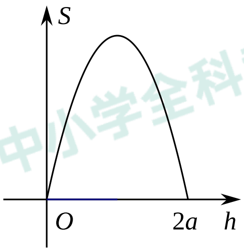
A.



B.



C.



D.

第 II 卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

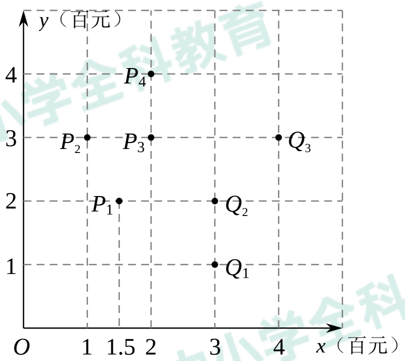
11. 已知函数 $f(x)=x^3+ax$．若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 2，则实数 a 的值是______．

12. 已知双曲线的两条渐近线互相垂直，则该双曲线的离心率为______．

13. 已知点 $O(0,0)$，$A(1,2)$，$B(m,0)$ $(m>0)$，则 $\cos<\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}>=$______；若 B 是以 OA 为边的矩形的顶点，则 $m=$______．

14. 若实数 α，β 满足方程组 $\begin{cases}1+2\cos\alpha=2\cos\beta,\\ \sqrt{3}+2\sin\alpha=2\sin\beta,\end{cases}$ 则 β 的一个值是______．

15. 对平面直角坐标系 xOy 中的两组点，如果存在一条直线 $ax+by+c=0$ 使这两组点分别位于该直线的两侧，则称该直线为“分类直线”．对于一条分类直线 l，记所有的点到 l 的距离的最小值为 d_l，约定：d_l 越大，分类直线 l 的分类效果越好．某学校高三（2）班的 7 位同学在 2020 年期间网购文具的费用 x（单位：百元）和网购图书的费用 y（单位：百元）的情况如图所示．现将 P_1，P_2，P_3 和 P_4 归为第 I 组点，将 Q_1，Q_2 和 Q_3 归为第 II 组点．在上述约定下，可得这两组点的分类效果最好的分类直线，记为 L．



给出下列四个结论：

①直线 $x=2.5$ 比直线 $3x-y-5=0$ 的分类效果好；

②分类直线 L 的斜率为 2；

③该班另一位同学小明的网购文具与网购图书的费用均为 300 元，则小明的这两项网购花销的费用所对应的点与第 II 组点位于 L 的同侧；

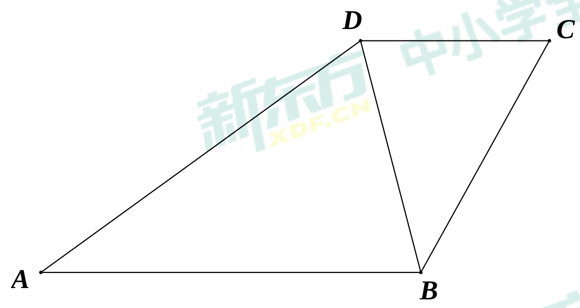
④如果从第Ⅰ组点中去掉点P_1，第Ⅱ组点保持不变，则分类效果最好的分类直线不是L.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题：共 6 小题，共 85 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

16. （本小题共 14 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB=2\sqrt{6}$，$CD=\sqrt{6}$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\angle ADB=\dfrac{1}{3}$.



（Ⅰ）求 $\cos\angle BDC$；

（Ⅱ）求 BC 的长.

17. （本小题共 14 分）

在如图所示的多面体中，$AB // CD$，四边形 $ACFE$ 为矩形，$AB = AE = 1$，$AD = CD = 2$.

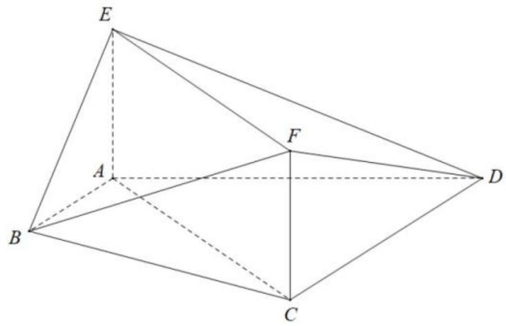
（Ⅰ）求证：平面 $ABE //$ 平面 CDF；

（Ⅱ）设平面 $BEF \cap$ 平面 $CDF = l$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择若干个作为已知，使二面角 $B-l-C$ 的大小确定，并求此二面角的余弦值.

条件①：$AB \perp AD$；

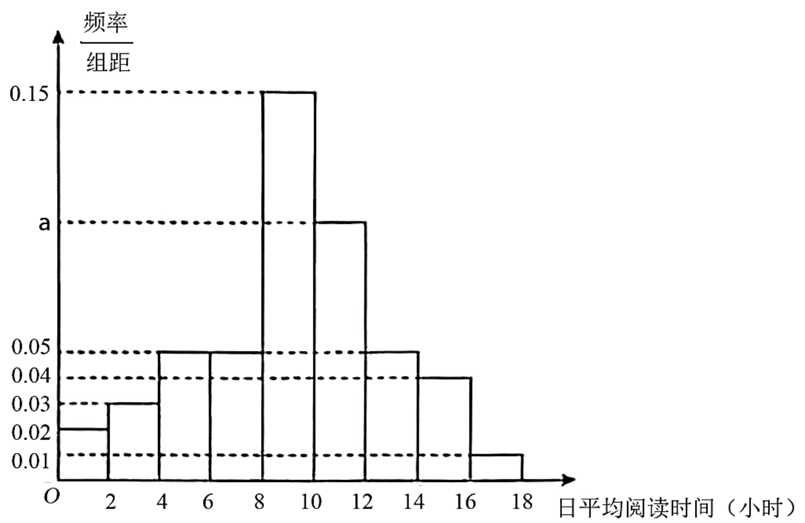
条件②：$AE \perp$ 平面 $ABCD$；

条件③：平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$.



18. （本小题共 14 分）

每年的4月23日是联合国教科文组织确定的“世界读书日”，又称“世界图书和版权日”．为了解某地区高一学生阅读时间的分配情况，从该地区随机抽取了500名高一学生进行在线调查，得到了这500名学生的日平均阅读时间(单位：小时)，并将样本数据分成$[0,2],(2,4],(4,6],(6,8],(8,10],(10,12],(12,14],(14,16],(16,18]$九组，绘制成如图所示的频率分布直方图.



（Ⅰ）求a的值；

（Ⅱ）为进一步了解这500名学生数字媒体阅读时间和纸质图书阅读时间的分配情况，从日平均阅读时间在$(12,14],(14,16],(16,18]$三组内的学生中，采用分层抽样的方法抽取了10人，现从这10人中随机抽取3人，记日平均阅读时间在$(14,16]$内的学生人数为X，求X的分布列；

（Ⅲ）以调查结果的频率估计概率，从该地区所有高一学生中随机抽取20名学生，用“$P_{20}(k)$”表示这20名学生中恰有k名学生日平均阅读时间在$(10,12]$（单位：小时）内的概率，其中$k=0,1,2,\ldots,20$．当$P_{20}(k)$最大时，写出k的值.（只需写出结论）

19. （本小题共 15 分）

已知函数 $f(x)=x\sin x$.

（Ⅰ）判断函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上的单调性，并说明理由；

（Ⅱ）求证：函数 $f(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 内有且只有一个极值点；

（Ⅲ）求函数 $g(x)=\dfrac{f(x)+1}{\ln x}$ 在区间 $(1,\pi]$ 上的最小值.

20. （本小题共 14 分）

已知椭圆$M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过$A(-2,0)$，$B(0,1)$两点.

（Ⅰ）求椭圆M的离心率；

（Ⅱ）设椭圆M的右顶点为C，点P在椭圆M上（P不与椭圆M的顶点重合），直线AB与直线CP交于点Q，直线BP交x轴于点S，求证：直线SQ过定点.

21. （本小题共 15 分）

已知无穷数列$\{a_n\}$，对于$m\in \mathbf{N}^*$，若$\{a_n\}$同时满足以下三个条件，则称数列$\{a_n\}$具有性质$P(m)$.

条件①：$a_n>0(n=1,2,\cdots)$；

条件②：存在常数$T>0$，使得$a_n\le T(n=1,2,\cdots)$；

条件③：$a_n+a_{n+1}=ma_{n+2}(n=1,2,\cdots)$.

（Ⅰ）若$a_n=5+4\times(-\frac{1}{2})^n(n=1,2,\cdots)$，且数列$\{a_n\}$具有性质$P(m)$，直接写出$m$的值和一个$T$的值；

（Ⅱ）是否存在具有性质$P(1)$的数列$\{a_n\}$？若存在，求数列$\{a_n\}$的通项公式；若不存在，说明理由；

（Ⅲ）设数列$\{a_n\}$具有性质$P(m)$，且各项均为正整数，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

2021 年北京市海淀区高三一模数学答案

2021.4

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	C	B	D	C	C	A	D	D

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. -1

12. $\sqrt{2}$

13. $\frac{\sqrt{5}}{5}$；5

14. 0

15. ②③④

三、解答题：共 6 小题，共 85 分。

16. （本小题共 14 分）

（Ⅰ）在$\triangle ABD$中，$\angle A+\angle ADB+\angle ABD=\pi$，

又因为$AB//CD$，

所以$\angle BDC=\angle ABD=\pi-(\angle A+\angle ADB)$，

因为$\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\angle ADB=\dfrac{1}{3}$，且$A\in(0,\pi)$，$\angle ADB\in(0,\pi)$，

所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\angle ADB=\sqrt{1-\cos^2\angle ADB}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以$\cos\angle BDC=\cos[\pi-(\angle A+\angle ADB)]$

$=-\cos(\angle A+\angle ADB)$

$=-\cos A\cos\angle ADB+\sin A\sin\angle ADB$

$=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

（Ⅱ）在$\triangle ABD$中，由正弦定理得$\dfrac{BD}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，

所以$BD=\dfrac{AB\cdot\sin A}{\sin\angle ADB}=3$，

在$\triangle BCD$中，由余弦定理得$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle BDC$，

即$BC^2=9+6-2\times3\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}}{9}=11$，

所以$BC=\sqrt{11}$.

17. （本小题共 14 分）

（Ⅰ）因为 $AB // CD$，且 $AB \not\subset$ 平面 CDF， $CD \subset$ 平面 CDF，

所以 $AB //$ 平面 CDF，

因为 $ACFE$ 是矩形，

所以 $AE // CF$，

因为 $AE \not\subset$ 平面 CDF， $CF \subset$ 平面 CDF，

所以 $AE //$ 平面 CDF，

又因为 $AE \cap AB = A$，且 $AE, AB \subset$ 平面 ABE，

所以平面 $ABE //$ 平面 CDF .

（Ⅱ）选①②或①②③

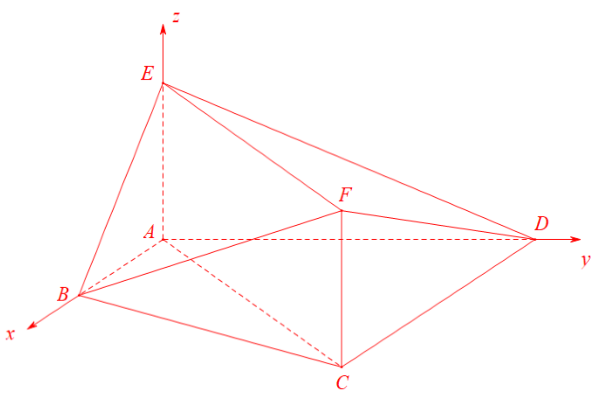
因为 $AE \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $AE \perp AB$， $AE \perp AD$.

因为 $AB \perp AD$，所以 AB, AD, AE 两两垂直，

故以 A 为原点，分别以 AB, AD, AE 为 x 轴， y 轴， z 轴，如图建立空间直角坐标系.

$A(0,0,0)$， $B(1,0,0)$， $E(0,0,1)$， $D(0,2,0)$，

$C(2,2,0)$， $F(2,2,1)$.



所以 $\overrightarrow{EF} = (2,2,0)$， $\overrightarrow{BE} = (-1,0,1)$，

设平面 BEF 的一个法向量 $\vec{n} = (x,y,z)$，

由 $\begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{BE} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$， 得 $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$

令 $x = 1$，则 $y = -1$， $z = 1$，得 $\vec{n} = (1,-1,1)$.

$\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$， $\overrightarrow{CF}=(0,0,1)$，

设平面 CDF 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{CF}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$， 得 $\begin{cases}-2x=0\\ -2z=0\end{cases}$

令 $y=1$，所以 $\vec{m}=(0,1,0)$.

设二面角 $B-l-C$ 为 θ，由图可知 θ 为锐角，

则 $\cos\theta=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

选①③

因为平面 $AED\perp$ 平面 $ABCD$，

且平面 $AED\cap$ 平面 $ABCD=AD$， $AB\subset$ 平面 $ABCD$， $AB\perp AD$，

所以 $AB\perp$ 平面 AED，

又因为 $AE\subset$ 平面 AED，

所以 $AB\perp AE$.

因为 $AC\perp AE$， $AB\cap AC=A$，

所以 $AE\perp$ 平面 $ABCD$ $AB\cap AC=A$，

所以 $AE\perp AD$.

所以 AB,AD,AE 两两垂直，故以 A 为原点，分别以 AB,AD,AE 为 x 轴， y 轴， z 轴，

如图建立空间直角坐标系，

$A(0,0,0)$， $B(1,0,0)$， $E(0,0,1)$， $D(0,2,0)$， $C(2,2,0)$， $F(2,2,1)$.

所以$\overrightarrow{EF}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,1)$，

设平面BEF的一个法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}2x+2y=0\\ -x+z=0\end{cases}$

令$x=1$，则$y=-1$，$z=1$，得$\vec{n}=(1,-1,1)$.

$\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{CF}=(0,0,1)$，

设平面CDF的法向量$\vec{m}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{CF}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-2x=0\\ -2z=0\end{cases}$

令$y=1$，所以$\vec{m}=(0,1,0)$.

设二面角$B-l-C$为θ，由图可知θ为锐角，

则$\cos\theta=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

②③不能选.

18. （本小题共 14 分）

（Ⅰ）由题可知 $(0.01+0.02+0.03+0.04+0.05+0.05+0.05+a+0.15)\times 2=1$，

解得 $a=0.1$.

（Ⅱ）由图可知日平均阅读时间在 $(12,14],(14,16],(16,18]$ 三组的频率分别为 $0.1,0.08,0.02$，

其比值为 $5:4:1$，

则采用分层抽样的方法抽样时，三组人数分别为 5 人，4 人，1 人，

所以随机变量 X 的所有可能取值为 $0,1,2,3$，

$P(X=0)=\dfrac{C_6^3C_4^0}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$； $P(X=1)=\dfrac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$；

$P(X=2)=\dfrac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$； $P(X=3)=\dfrac{C_6^0C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

（Ⅲ）$k=4$.

19. （本小题共 15 分）

（Ⅰ） $f(x)=x\sin x$，

$f'(x)=x\cos x+\sin x$，

$x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时， $x>0$， $\cos x>0$， $\sin x>0$，

$\therefore f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

（Ⅱ） $f'(x)=x\cos x+\sin x$，

令 $h(x)=f'(x)$，

$h'(x)=-x\sin x+2\cos x$，

$\because x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，

$\therefore \sin x>0$， $2\cos x<0$，

$\therefore h'(x)<0$，

即 $f'(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上单调递减.

且 $f'(\frac{\pi}{2})=1>0$， $f'(\pi)=-\pi<0$，

$\therefore \exists x_0\in(\frac{\pi}{2},\pi)$， 使得 $f'(x_0)=0$.

x	$(\frac{\pi}{2},x_0)$	x_0	(x_0,π)
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

$\therefore f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内有且只有一个极值点.

（III） $g(x)=\frac{f(x)+1}{\ln x}$， $x\in(1,\pi]$，

由（II）知， $f'(x)=x\cos x+\sin x$，

$x\in(1,\frac{\pi}{2})$ 时， $f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增，在 (x_0,π) 上单调递减，

$f(1)=\sin 1$， $f(\pi)=0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(1,\pi]$ 上的最小值为 $f(\pi)$.

令 $p(x)=\ln x$， $p(x)$ 在 $(1,\pi]$ 上的最大值为 $p(\pi)$，

$\because p(x)>0$， $f(x)>0$，

$\therefore g(x)_{\min}=\frac{f(x)_{\min}+1}{p(x)_{\max}}=\frac{1}{\ln\pi}$.

20. （本小题共 14 分）

（Ⅰ）依题意，$\frac{4}{a^2}=1$，得 $a=2$，$\frac{1}{b^2}=1$，得 $b=1$.

$\because c^2=a^2-b^2=4-1=3$，即 $c=\sqrt{3}$.

$\therefore$ 离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得椭圆 M 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

由已知条件可知，$C(2,0)$.

设直线 $l_{CP}: y=k(x-2)$，$P(x_0,y_0)$，

因为 P 不与椭圆 M 的顶点重合，所以 $x_0\neq 0$ 且 $x_0\neq\pm 2$.

则有 $\begin{cases} y=k(x-2) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，得 $(4k^2+1)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$，

$\therefore \Delta=(16k^2)^2-4(4k^2+1)(16k^2-4)>0$.

$2\cdot x_0=\frac{16k^2-4}{4k^2+1}$，$x_0=\frac{8k^2-2}{4k^2+1}$，$y_0=\frac{-4k}{4k^2+1}$，

即 $P(\frac{8k^2-2}{4k^2+1},\frac{-4k}{4k^2+1})$.

由已知可知，直线 $l_{AB}: y=\frac{1}{2}x+1$，

则有 $\begin{cases} y=k(x-2) \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$，解得 $x=\frac{4k+2}{2k-1}, y=\frac{4k}{2k-1}$，

即 $Q(\frac{4k+2}{2k-1},\frac{4k}{2k-1})$.

直线$l_{BP}: y=\dfrac{y_0-1}{x_0}x+1=\dfrac{\dfrac{-4k}{4k^2+1}-1}{\dfrac{8k^2-2}{4k^2+1}}x+1=\dfrac{-(2k+1)^2}{8k^2-2}x+1$.

令$y=0$，$x=\dfrac{8k^2-2}{(2k+1)^2}=\dfrac{2(4k^2-1)}{(2k+1)^2}=\dfrac{2(2k-1)}{2k+1}$，

即$S(\dfrac{2(2k-1)}{2k+1},0)$.

①当直线QS斜率不存在时，即

$\dfrac{4k+2}{2k-1}=\dfrac{2(2k-1)}{2k+1}$，得$k=0$，与已知条件矛盾.

$\therefore$直线QS斜率必存在.

②当直线QS斜率存在时，

$k_{QS}:\dfrac{\dfrac{4k}{2k-1}}{\dfrac{4k+2}{2k-1}-\dfrac{2(2k-1)}{2k+1}}=\dfrac{2k+1}{4}$，

$l_{QS}: y=\dfrac{2k+1}{4}(x-\dfrac{2(2k-1)}{2k+1})$，整理得：

$k(\dfrac{1}{2}x-1)+\dfrac{x}{4}-y+\dfrac{1}{2}=0$

$\therefore\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-1=0\\ \dfrac{x}{4}-y+\dfrac{1}{2}=0\end{cases}$，解得$x=2,y=1$，即定点为$(2,1)$.

综上，直线QS过定点$(2,1)$.

21. （本小题共 15 分）

（Ⅰ）$m=2$；

答案不唯一．如$T=6$．

（Ⅱ）不存在具有性质$P(1)$的数列$\{a_n\}$，理由如下：

假设存在具有性质$P(1)$的数列，设为$\{a_n\}$，则$m=1$．

所以$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n=1,2,\cdots)$．

因为$a_n>0(n=1,2,\cdots)$，

所以$a_{n+2}>a_{n+1}$，即$a_2<a_3<a_4<\cdots$．

所以$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}\geq a_{n+2}+a_2$，即$a_4-a_3\geq a_2$，$a_5-a_4\geq a_2$，…，$a_{n+3}-a_{n+2}\geq a_2$．

累加得，$a_{n+3}-a_3\geq na_2$．

对于常数$T>0$，当$n>\dfrac{T-a_3}{a_2}$时，$a_{n+3}\geq na_2+a_3>T$，与②矛盾．

所以不存在具有性质$P(1)$的数列$\{a_n\}$．

（Ⅲ）因为数列$\{a_n\}$具有性质$P(m)$，由（Ⅱ）知$m\neq 1$．

①当$m=2$时，$a_{n+2}=\dfrac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)$，即$a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$，$n=1,2,\cdots$．

所以$|a_{n+2}-a_{n+1}|=\dfrac{1}{2^n}|a_2-a_1|$．

若$a_1=a_2=c(c\in\mathbf{N}^*)$，则$a_n=c$，$n=1,2,\cdots$．

经检验，数列$\{c\}(c\in\mathbf{N}^*)$具有性质$P(2)$．

若$a_1\neq a_2$，当$n>\log_2|a_2-a_1|$时，$|a_{n+2}-a_{n+1}|=\dfrac{1}{2^n}|a_2-a_1|\in(0,1)$，

与$a_n\in\mathbf{N}^*$矛盾．

②当$m\geq 3$时，令$b_n=\max\{a_n,a_{n+1}\}\in\mathbf{N}^*$，则

$a_{n+2}=\frac{1}{m}(a_{n+1}+a_n)\le\frac{1}{3}(a_{n+1}+a_n)\le\frac{1}{3}(b_n+b_n)<b_n$， $n=1,2,\cdots$.

所以 $a_{n+3}=\frac{1}{m}(a_{n+2}+a_{n+1})\le\frac{1}{3}(a_{n+2}+a_{n+1})<\frac{1}{3}(b_n+b_n)<b_n$.

所以 $b_{n+2}=\max\{a_{n+2},a_{n+3}\}<b_n$.

所以 $b_{n+2}\le b_n-1$， $n=1,2,\cdots$.

所以 $b_3-b_1\le-1$， $b_5-b_3\le-1$， $\cdots$， $b_{2n+1}-b_{2n-1}\le-1$.

所以 $b_{2n+1}-b_1\le-n$.

当 $n\ge b_1$ 时， $b_{2n+1}\le b_1-n\le0$，与 $b_{2n+1}\in\mathbf{N}^*$ 矛盾.

综上所述，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=c(c\in\mathbf{N}^*)$.