

2020 年北京市中考数学逐题解析

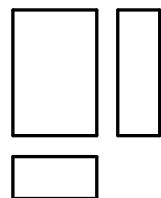
一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 右图是某几何体的三视图，该几何体是

- (A) 圆柱
(C) 三棱柱

- (B) 圆锥
(D) 长方体



【答案】D

【解析】本题考查几何体三视图，难度易。

2. 2020 年 6 月 23 日，北斗三号最后一颗全球组网卫星从西昌卫星发射中心发射升空，6 月 30 日成功定点于距离地球 36 000 公里的地球同步轨道。将 36 000 用科学记数法表示应为

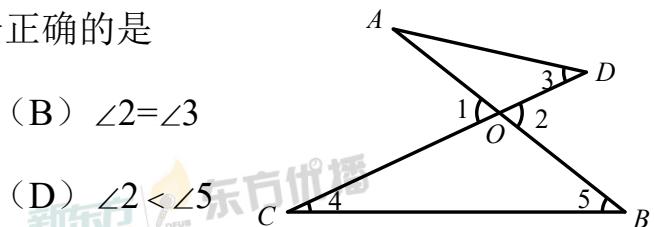
- (A) 0.36×10^5 (B) 3.6×10^5 (C) 3.6×10^4 (D) 36×10^3

【答案】C

【解析】本题考查科学记数法，难度易。

3. 如图， AB 和 CD 相交于点 O ，则下列结论正确的是

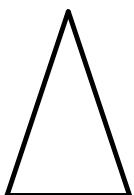
- (A) $\angle 1 = \angle 2$
(C) $\angle 1 > \angle 4 + \angle 5$
- (B) $\angle 2 = \angle 3$
(D) $\angle 2 < \angle 5$



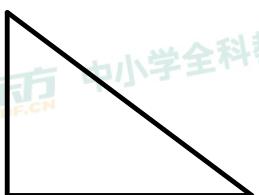
【答案】A

【解析】本题考查对顶角的性质，难度易。

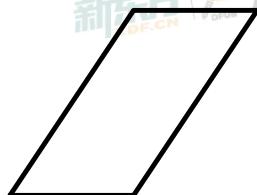
4. 下列图形中，既是中心对称图形也是轴对称图形的是



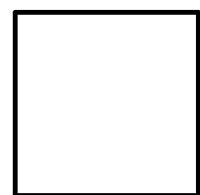
(A)



(B)



(C)



(D)

【答案】D

【解析】本题考查中心对称图形、轴对称图形的概念，难度易.

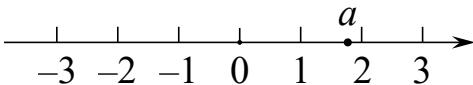
5. 正五边形的外角和为

- (A) 180° (B) 360° (C) 540° (D) 720°

【答案】B

【解析】本题考查多边形外角和为 360° ，难度易.

6. 实数 a 在数轴上的对应点的位置如图所示. 若实数 b 满足 $-a < b < a$ ，则 b 的值可以是



- (A) 2 (B) -1 (C) -2 (D) -3

【答案】B

【解析】本题考查相反数的几何意义以及数轴上的数比较大小. 因为实数 a 在 $1 \sim 2$ 之间， $-a$ 表示的数在 $-2 \sim -1$ 之间，则 b 的值在 $-a$ 和 a 之间，可以是-1. 故选 B，难度易.

7. 不透明的袋子中有两个小球，上面分别写着数字“1”，“2”，除数字外两个小球无其他差别. 从中随机摸出一个小球，记录其数字，放回并摇匀，再从中随机摸出一个小球，记录其数字，那么两次记录的数字之和为3的概率是

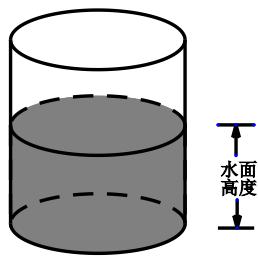
- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】本题两次摸出小球，记录数字分别为“1， 1”、“1， 2”、“2， 1”“2， 2”四种情况；两次记录之和为 3，分别为“1， 2”、“2， 1”两种情况，所以概率是 $2 \div 4 = \frac{1}{2}$ ，故选 C，难度中.

8. 有一个装有水的容器，如图所示。容器内的水面高度是 10 cm，

现向容器内注水，并同时开始计时。在注水过程中，水面高度以每秒 0.2 cm 的速度匀速增加，则容器注满水之前，容器内的水面高度与对应的注水时间满足的函数关系是



(A) 正比例函数关系

(B) 一次函数关系

(C) 二次函数关系

(D) 反比例函数关系

【答案】B

【解析】本题设容器内水面高度为 h cm，时间为 t s，则容器内的水面高度与对应的注水时间函数关系为： $h=0.2t+10$ ，符合一次函数关系，故选 B，难度中。

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 若代数式 $\frac{1}{x-7}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq 7$

【解析】分式有意义的条件（分母不为 0）。故答案为 $x \neq 7$.

10. 已知关于 x 的方程 $x^2+2x+k=0$ 有两个相等的实数根，则 k 的值是_____.

【答案】 1

【解析】本题考查了一元二次方程根的判别式。由题意知 $\Delta=0$ ，即 $\Delta=2^2-4k=0$ ，得 $k=1$ 。

11. 写出一个比 $\sqrt{2}$ 大且比 $\sqrt{15}$ 小的整数_____.

【答案】 2（或 3），填一个即可

【解析】本题考查了实数。 $\because \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2 < \sqrt{15}$ 或 $\sqrt{2} < \sqrt{9} = 3 < \sqrt{15}$ 。故答案为 2（或 3）。

12. 方程组 $\begin{cases} x-y=1, \\ 3x+y=7 \end{cases}$ 的解为_____.

【答案】 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

【解析】本题考查了二元一次方程. $\begin{cases} x - y = 1 \text{ ①} \\ 3x + y = 7 \text{ ②} \end{cases}$ 由①+②得 $4x=8$, 解得 $x=2$.

将 $x=2$ 代入①解得 $y=1$. 故答案为 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y=x$ 与双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 交于 A , B 两点, 若点 A , B

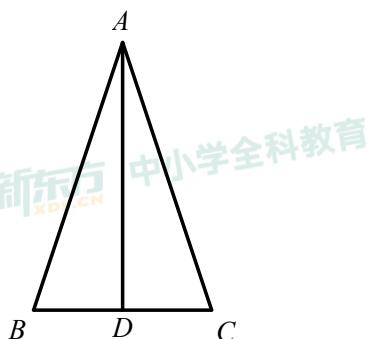
的纵坐标分别为 y_1 , y_2 , 则 y_1+y_2 的值为____.

【答案】0

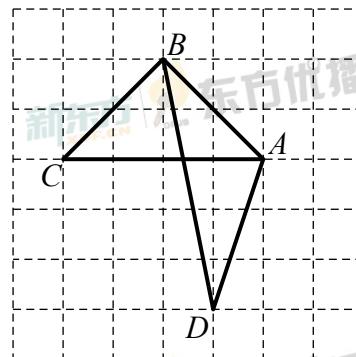
【解析】本题考查了正比例函数与反比例函数交点坐标.

由题意知 $\begin{cases} y=x \text{ ①} \\ y=\frac{m}{x} \text{ ②} \end{cases}$ ①代入②得 $y^2=m$, 解得 $y_1=-\sqrt{m}$, $y_2=\sqrt{m}$. $\therefore y_1+y_2=0$.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 点 D 在 BC 上(不与点 B , C 重合), 只需添加一个条件即可证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 这个条件可以是____(写出一个即可).



第 14 题图



第 15 题图

【答案】 D 为 BC 中点(或 $AD \perp BC$ 或 AD 平分 $\angle BAC$).

【解析】本题考查了全等三角形的判定及等腰三角形的性质.

由题可知, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 则 $\angle B=\angle C$, 要判定 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 则还需一组对应边相等或一组对应角相等, 则可得需要 $BD=CD$, 即 D 为 BC 中点; 或 $\angle BAD=\angle CAD$, 即 AD 平分 $\angle BAC$. 因为等腰三角形性质还可以根据直角三角形 HL , 即 $AD \perp BC$ 可得全等.

15. 如图所示的网格是正方形网格, A , B , C , D 是网格线交点, 则 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle ABD$ 的面积的大小关系为: $S_{\triangle ABC}$ _____ $S_{\triangle ABD}$ (填“ $>$ ”“ $=$ ”或“ $<$ ”).

【答案】=

【解析】本题考查格点问题.由图可计算 $S_{\triangle ABC} = 4$, $S_{\triangle ABD} = 4$, 故答案为=.

16. 下图是某剧场第一排座位分布图.



甲, 乙, 丙, 丁四人购票, 所购票数分别为 2, 3, 4, 5, 每人选座购票时, 只购买第一排的座位相邻的票, 同时使自己所选的座位号之和最小. 如果按“甲, 乙, 丙, 丁”的先后顺序购票, 那么甲购买 1, 2 号座位的票, 乙购买 3, 5, 7 号座位的票, 丙选座购票后, 丁无法购买到第一排座位的票, 若丙第一个购票, 要是其他三人都能购买到第一排座位的票, 写出一种满足条件的购票先后顺序 _____.

【答案】丙丁甲乙 (或丙丁乙甲或丙甲丁乙或丙乙丁甲, 选择其一即可)

【解析】本题考查了学生的逻辑分析能力.

解法一:

$$\begin{cases} \text{①丙: } 3, 1, 2, 4 \\ \text{②丁: } 5, 7, 9, 11, 13 \\ \text{③甲: } 6, 8 \\ \text{④乙: } 10, 12, 14 \end{cases}$$

解法二:

$$\begin{cases} \text{①丙: } 3, 1, 2, 4 \\ \text{②丁: } 5, 7, 9, 11, 13 \\ \text{③乙: } 6, 8, 10 \\ \text{④甲: } 12, 14 \end{cases}$$

解法三:

$$\begin{cases} \text{①丙: } 3, 1, 2, 4 \\ \text{②甲: } 5, 7 \\ \text{③丁: } 6, 8, 10, 12, 14 \\ \text{④乙: } 9, 11, 13 \end{cases}$$

解法四:

$$\begin{cases} \text{①丙: } 3, 1, 2, 4 \\ \text{②乙: } 5, 7, 9 \\ \text{③丁: } 6, 8, 10, 12, 14 \\ \text{④甲: } 11, 13 \end{cases}$$

三、解答题 (本题共 68 分, 第 17-20 题, 每小题 5 分, 第 21 题 6 分, 第 22 题 5 分, 第 23-24 题, 每小题 6 分, 第 25 题 5 分, 第 26 题 6 分, 第 27-28 题, 每小题 7 分)

解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算: $(\frac{1}{3})^{-1} + \sqrt{18} + |-2| - 6 \sin 45^\circ$.

【答案】5

【解析】解: 原式 $= 3 + 3\sqrt{2} + 2 - 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= 3 + 2 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$
 $= 5$

18. 解不等式组: $\begin{cases} 5x - 3 > 2x, \\ \frac{2x - 1}{3} < \frac{x}{2}. \end{cases}$

【答案】 $1 < x < 2$

【解析】 $\begin{cases} 5x - 3 > 2x \text{①} \\ \frac{2x - 1}{3} < \frac{x}{2} \text{②} \end{cases}$

解: 解不等式①得: $x > 1$

解不等式②得: $x < 2$

\therefore 原不等式组的解集为 $1 < x < 2$.

19. 已知 $5x^2 - x - 1 = 0$, 求代数式 $(3x+2)(3x-2) + x(x-2)$ 的值.

【答案】-2

【解析】解: $(3x+2)(3x-2) + x(x-2)$

$$\begin{aligned} &= 9x^2 - 4 + x^2 - 2x \\ &= 10x^2 - 2x - 4 \end{aligned}$$

由 $5x^2 - x - 1 = 0$ 可知

$$5x^2 - x = 1$$

$$\therefore 10x^2 - 2x = 2$$

$$\therefore \text{原式} = 2 - 4$$

$$= -2$$

20. 已知: 如图, $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $AB=AC$, $CD \parallel AB$.

求作: 线段 BP , 使得点 P 在直线 CD 上,

$$\text{且 } \angle ABP = \frac{1}{2} \angle BAC.$$

作法: ①以点 A 为圆心, AC 长为半径画圆,

交直线 CD 于 C, P 两点;

②连接 BP .

线段 BP 就是所求作的线段.

(1) 使用直尺和圆规, 依作法补全图形 (保留作图痕迹);

(2) 完成下面的证明.

证明: $\because CD \parallel AB$,

$$\therefore \angle ABP = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\because AB=AC,$$

\therefore 点 B 在 $\odot A$ 上.

又 \because 点 C, P 都在 $\odot A$ 上,

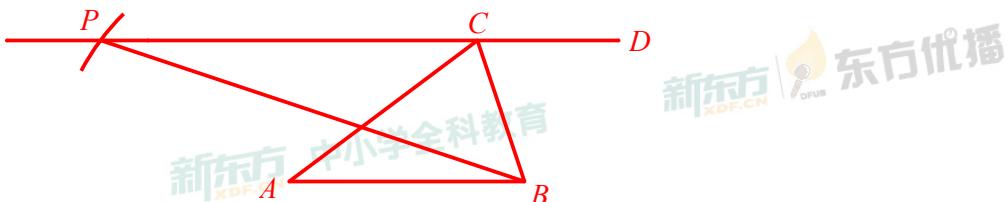
$$\therefore \angle BPC = \frac{1}{2} \angle BAC \quad (\underline{\hspace{2cm}}) \quad (\text{填推理的依据}).$$

$$\therefore \angle ABP = \frac{1}{2} \angle BAC.$$

【答案】见解析

【解析】

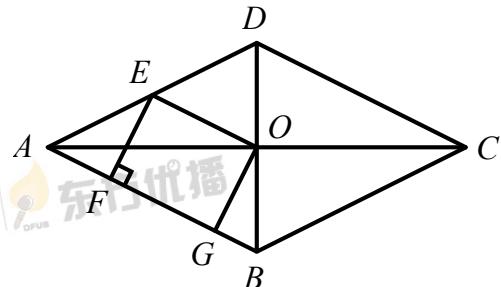
(1) 补全的图形如图所示:



(2) $\angle BPC$; 一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

21. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , E 是 AD 的中点, 点 F, G 在 AB 上, $EF \perp AB$, $OG \parallel EF$.

- (1) 求证: 四边形 $OEFG$ 是矩形;
 (2) 若 $AD=10$, $EF=4$, 求 OE 和 BG 的长.



【答案】

- (1) 见解析
 (2) $OE=5$, $BG=2$

【解析】

(1) 证明: \because 菱形 $ABCD$ 对角线 AC, BD 相交于点 O

\therefore 点 O 为 BD 中点

\therefore 点 E 为 AD 中点

$\therefore OE \parallel AB$ 即 $OE \parallel FG$

$\because EF \perp AB$

$\therefore \angle EFG = 90^\circ$

$\because OG \parallel EF$

$\therefore \angle OGF = 90^\circ$

$\because OE \parallel GF$

$\therefore \angle FEO = 90^\circ$

\therefore 四边形 $OEFG$ 为矩形

(2) 解: \because 菱形 $ABCD$ 对角线 AC, BD 交于 O 点

$\therefore \angle AOD = 90^\circ$, $AD = AB = 10$

\therefore 点 E 为 AD 中点

$\therefore OE = EA = ED = \frac{1}{2}AD = 5$

在矩形 $OEFG$ 中

$$\therefore FG = 5$$

$$\because EA = 5, EF = 4 \text{ 且 } EF \perp AB$$

$$\therefore AF = 3$$

$$\because AB = 10, AF = 3, FG = 5$$

$$\therefore BG = 2$$



22. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 的图像由函数 $y = x$ 的图像平移得到，且经过点 $(1, 2)$.

(1) 求这个一次函数的解析式；

(2) 当 $x > 1$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y = mx(m \neq 0)$ 的值大于一次函数 $y = kx + b$ 的值，直接写出 m 的取值范围.

【答案】

$$(1) y = x + 1$$

$$(2) m \geq 2$$

【解析】

解：(1) $\because y = kx + b(k \neq 0)$ 是由 $y = x$ 平移得到

$$\therefore k = 1$$

函数图像过点 $(1, 2)$ ，故 $2 = 1 \times 1 + b$

$$\therefore b = 1$$

\therefore 一次函数的解析式为 $y = x + 1$

$$(2) \because mx > x + 1$$

$$\therefore x > \frac{1}{m-1} (m-1 > 0)$$

$$\therefore x > 1$$

$$\therefore \frac{1}{m-1} \leq 1 (m-1 > 0)$$

$$\therefore m \geq 2$$

23. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为 BA 延长线上一点, CD 是 $\odot O$ 的切线, D 为切点, $OF \perp AD$ 于点 E , 交 CD 于点 F .

(1) 求证: $\angle ADC = \angle AOF$;

(2) 若 $\sin C = \frac{1}{3}$, $BD = 8$, 求 EF 的长.

【答案】

(1) 见解析

(2) $EF = 2$

【解析】

(1) 证明: 连接 OD

$\because CD$ 为 $\odot O$ 切线

$$\therefore \angle ODC = \angle ADC + \angle ADO = 90^\circ$$

$\because AB$ 为 $\odot O$ 直径

$$\therefore \angle ADB = \angle ADO + \angle ODB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ODB$$

$\because OD = OB$

$$\therefore \angle ODB = \angle OBD$$

$$\therefore \angle ADC = \angle OBD$$

$\because OF \perp AD$

$\therefore OF \parallel BD$

$$\therefore \angle OBD = \angle AOF$$

$$\therefore \angle ADC = \angle AOF$$

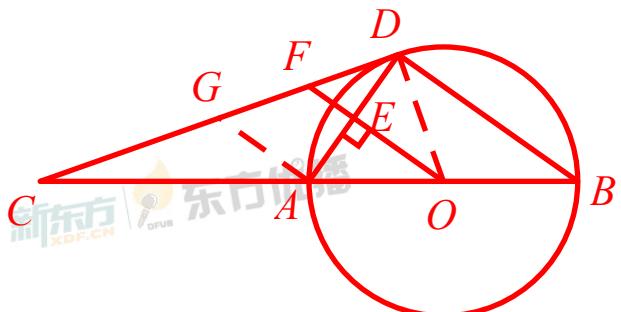
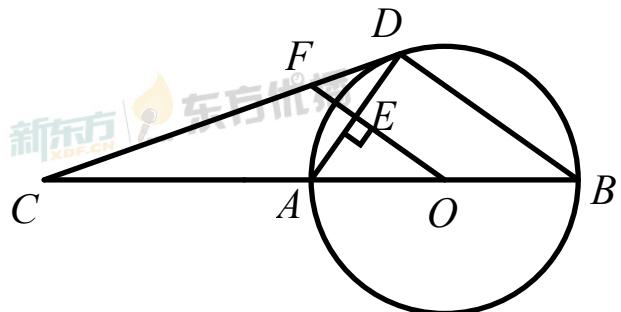
(2) 解: $\because \sin C = \frac{1}{3}$

$$\therefore OC = 3OD$$

$$\therefore OD = OA$$

$$\therefore CA = 2OD = AB$$

过点 A 作 $AG \parallel BD$ 交 CD 于点 G



$\because AG \parallel BD$, 点 A 为 BC 中点

$\therefore AG$ 为 $\triangle CBD$ 中位线

$\therefore BD = 8$

$\therefore AG = 4$

$\therefore AB$ 为直径

$\therefore \angle BDA = 90^\circ$

$\therefore OF \perp AD$

$\therefore \angle OEA = 90^\circ$, 点 E 为 AD 中点

$\therefore \angle OEA = \angle BDA$

$\therefore OF \parallel BD$

$\therefore AG \parallel OF$

$\therefore EF$ 为 $\triangle DGA$ 中位线

$\therefore EF = \frac{1}{2}AG = 2$

24. 小云在学习过程中遇到一个函数 $y = \frac{1}{6}|x|(x^2 - x + 1)$ ($x \geq -2$) .

下面是小云对其探究的过程, 请补充完整:

(1) 当 $-2 \leq x < 0$ 时,

对于函数 $y_1 = |x|$, 即 $y_1 = -x$, 当 $-2 \leq x < 0$ 时, y_1 随 x 的增大而_____, 且

$y_1 > 0$;

对于函数 $y_2 = x^2 - x + 1$, 当 $-2 \leq x < 0$ 时, y_2 随 x 的增大而_____, 且 $y_2 > 0$;

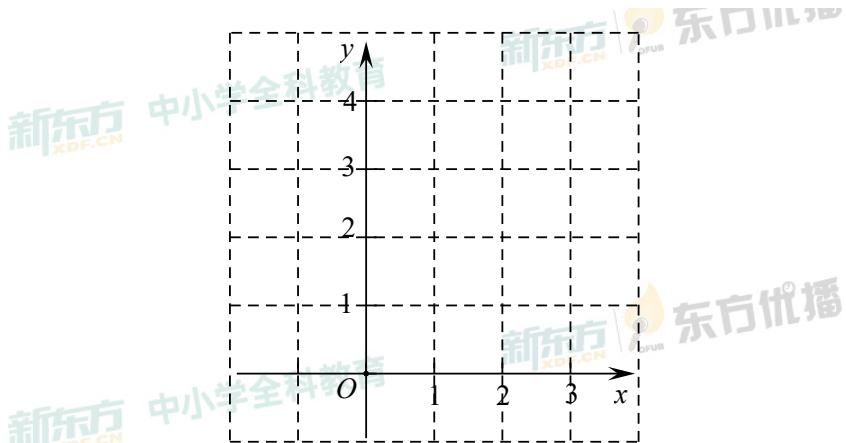
结合上述分析, 进一步探究发现, 对于函数 y , 当 $-2 \leq x < 0$ 时, y 随 x 的增大而_____.

(2) 当 $x \geq 0$ 时,

对于函数 y , 当 $x \geq 0$ 时, y 与 x 的几组对应值如下表:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	...
y	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{16}$	1	$\frac{95}{48}$	$\frac{7}{2}$...

结合上表，进一步探究发现，当 $x \geq 0$ 时， y 随 x 的增大而增大。在平面直角坐标系 xOy 中，画出当 $x \geq 0$ 时的函数 y 的图象。

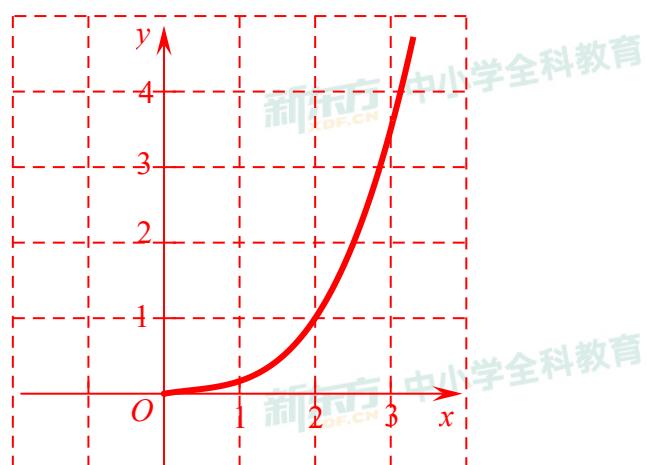


- (3) 过点 $(0, m)$ ($m > 0$) 作平行于 x 轴的直线 l ，结合(1)(2)的分析，解决问题：若直线 l 与函数 $y = \frac{1}{6}|x|(x^2 - x + 1)$ ($x \geq -2$) 的图象有两个交点，则 m 的最大值是_____。

【答案】

(1) 减小，减小，减小

(2)



(3) $\frac{7}{3}$

【解析】

(1) $y = -x$, $k < 0$, y 随 x 的增大而减小

$$y = x^2 - x + 1, \quad x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}, \quad a > 0, \quad \text{故 } -2 \leq a < 0, \quad y \text{ 随 } x \text{ 的增大而减小}$$

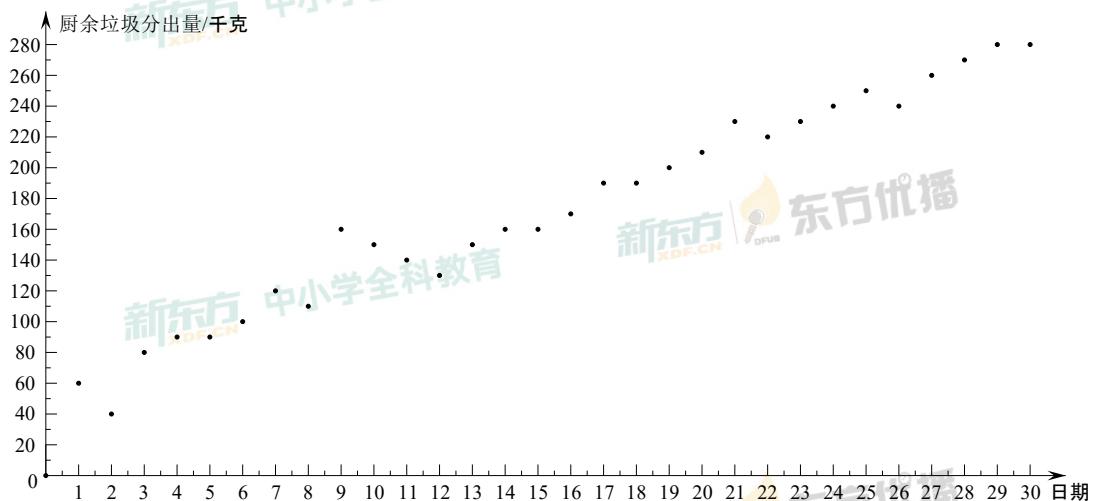
$y = \frac{1}{6}|x|(x^2 - x + 1)$, 根据前两个函数分析, 可得 y 随 x 的增大而减小

(2) 如图所示, 描点连线即可.

(3) 由(1)得, 当 $-2 \leq x < 0$ 时, y 的最大值为 $\frac{7}{3}$, 即 $x = -2$ 时最大.

25. 小云统计了自己所住小区 5 月 1 日至 30 日的厨余垃圾分出量 (单位: 千克), 相关信息如下:

a. 小云所住小区 5 月 1 日至 30 日的厨余垃圾分出量统计图:



b. 小云所住小区 5 月 1 日至 30 日分时段的厨余垃圾分出量的平均数如下:

时段 (Time Period)	1 日至 10 日	11 日至 20 日	21 日至 30 日
平均数 (Average)	100	170	250

(1) 该小区 5 月 1 日至 30 日的厨余垃圾分出量的平均数约为 _____ (结果取整数);

(2) 已知该小区 4 月的厨余垃圾分出量的平均数为 60, 则该小区 5 月 1 日至 30 日的厨余垃圾分出量的平均数约为 4 月的 _____ 倍 (结果保留小数点后一位);

(3) 记该小区 5 月 1 日至 10 日的厨余垃圾分出量的方差为 s_1^2 , 5 月 11 日至 20 日的厨余垃圾分出量的方差为 s_2^2 , 5 月 21 日至 30 日的厨余垃圾分出量的方差为 s_3^2 . 直接写出 s_1^2 , s_2^2 , s_3^2 的大小关系.

【答案】

(1) 173

(2) 2.9

(3) $s_1^2 > s_2^2 > s_3^2$ **【解析】**

(1) 根据加权平均数公式: $\frac{100 \times 10 + 170 \times 10 + 250 \times 10}{30} \approx 173.3$

取整为: 173

(2) $173 \div 60 \approx 2.88$, 保留一位小数为 2.9

(3) 依据图象分析, 波动越大, 方差越大, 故 $s_1^2 > s_2^2 > s_3^2$

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 为抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 上任意两点, 其中 $x_1 < x_2$.

(1) 若抛物线的对称轴为 $x = 1$, 当 x_1 , x_2 为何值时, $y_1 = y_2 = c$;

(2) 设抛物线的对称轴为 $x = t$. 若对于 $x_1 + x_2 > 3$, 都有 $y_1 < y_2$, 求 t 的取值范围.

【答案】(1) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ (2) $t \leq \frac{3}{2}$ **【解析】**

解: (1) $\because y = ax^2 + bx + c$

\therefore 当 $x = 0$ 时 $y = c$

\because 对称轴 $x = 1$, $x_1 < x_2$

$\therefore x_1 = 0$, $x_2 = 2$

(2) $\because x_1 + x_2 > 3$ 且 $y_1 < y_2$

$\therefore x_2$ 到 t 距离大于 x_1 到 t 的距离

$$\therefore |x_2 - t| > |x_1 - t|$$

① x_1, x_2 在对称轴左侧，不成立

② x_1, x_2 在对称轴右侧，则必有 $y_1 < y_2$ 成立

③ x_1, x_2 在对称轴异侧

$$\therefore x_2 - t > t - x_1$$

$$\therefore x_1 + x_2 > 2t$$

$$\therefore x_1 + x_2 > 3$$

$$\therefore 2t \leq 3$$

$$\therefore t \leq \frac{3}{2}$$

27. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC > BC$ ， D 是 AB 的中点。 E 为直线 AC 上一动点，连接 DE ，过点 D 作 $DF \perp DE$ ，交直线 BC 于点 F ，连接 EF .

(1) 如图 1，当 E 是线段 AC 的中点时，设 $AE = a$ ， $BF = b$ ，求 EF 的长(用含 a ， b 的式子表示)；

(2) 当点 E 在线段 CA 的延长线上时，依题意补全图 2，用等式表示线段 AE ， EF ， BF 之间的数量关系，并证明.

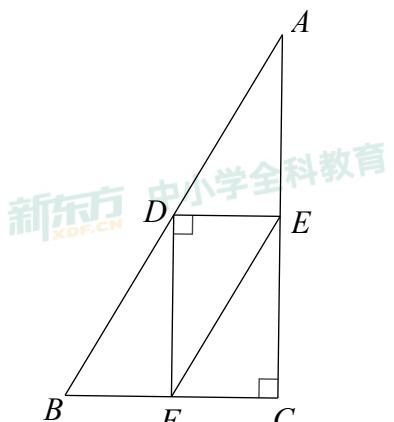


图1

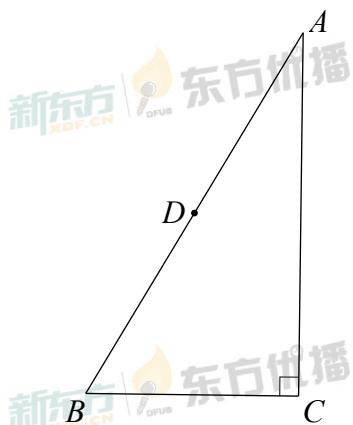


图2

【答案】

$$(1) EF = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(2) EF^2 = AE^2 + BF^2$$

【解析】

(1) 解: 如图 1 所示

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$

D 是 AB 的中点

E 是 AC 的中点

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线, $AE = EC = a$

$$\therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC$$

$\therefore \angle DEC = 90^\circ$

$\because DF \perp DE$

$\therefore \angle FDE = 90^\circ$

\therefore 四边形 $DFCE$ 是矩形

$$\therefore FC = DE$$

$$\therefore DE = FC = BF = b$$

在 $\text{Rt}\triangle FCE$ 中

$$EF = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(2) 结论: $EF^2 = AE^2 + BF^2$

证明: 如图 2 所示

延长 ED 至点 M , 使 $DM = DE$

连接 BM, MF

$\because D$ 为 AB 的中点

$$\therefore DB = DA$$

在 $\triangle DBM$ 和 $\triangle DAE$ 中

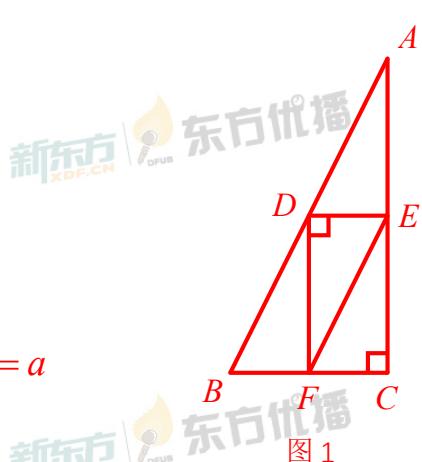
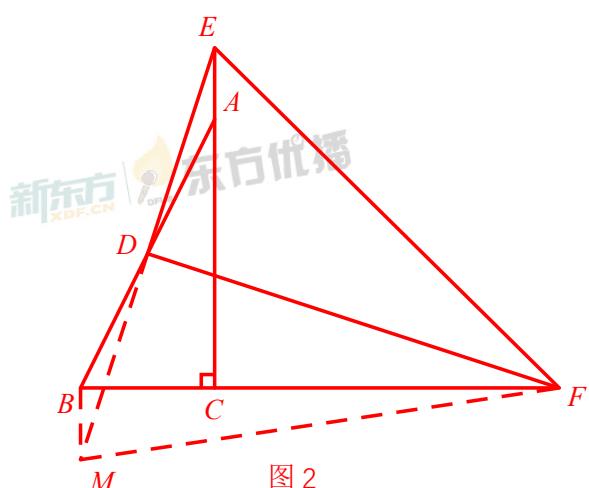


图 1



$$\therefore \begin{cases} DM = DE \\ \angle BDM = \angle ADE \\ DB = DA \end{cases}$$

$\therefore \triangle DBM \cong \triangle DAE$

$\therefore BM = AE, \angle DBM = \angle DAE$

$\therefore \angle DAE = \angle ACB + \angle ABC, \angle DBM = \angle MBF + \angle ABC$

$\therefore \angle MBF = \angle ACB = 90^\circ$

$\because DF \perp DE$

$\therefore DF$ 垂直平分 EM

$\therefore MF = EF$

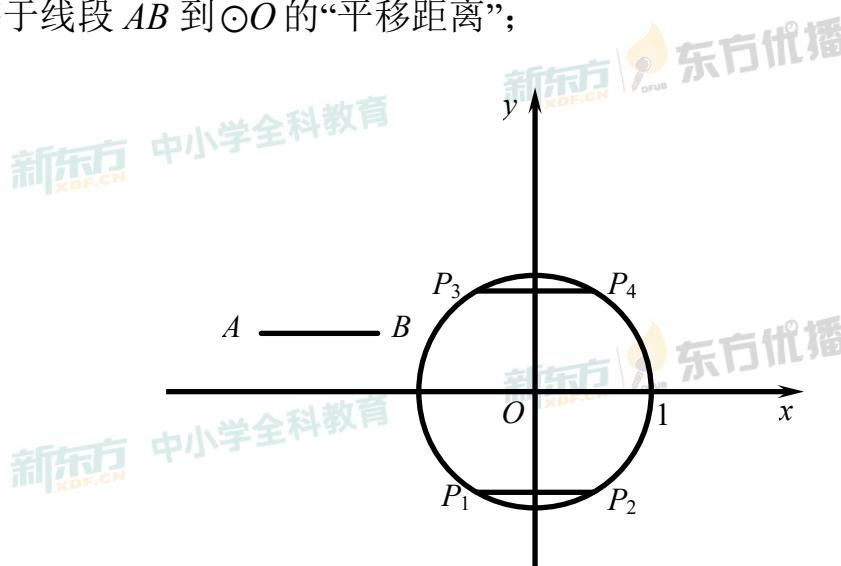
在 $\text{Rt}\triangle MBF$ 中, $MF^2 = BM^2 + BF^2$

$\therefore EF^2 = AE^2 + BF^2$

28. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为 1, A, B 为 $\odot O$ 外两点, $AB=1$.

给出如下定义: 平移线段 AB , 得到 $\odot O$ 的弦 $A'B'$ (A' , B' 分别为点 A , B 的对应点), 线段 AA' 长度的最小值称为线段 AB 到 $\odot O$ 的“平移距离”.

- (1) 如图, 平移线段 AB 得到 $\odot O$ 的长度为 1 的弦 P_1P_2 和 P_3P_4 中, 则这两条弦的位置关系是_____; 在点 P_1, P_2, P_3, P_4 中, 连接点 A 与点_____的线段长度等于线段 AB 到 $\odot O$ 的“平移距离”;



(2) 若点 A , B 都在直线 $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 上, 记线段 AB 到 $\odot O$ 的“平移距离”为 d_1 ,

求 d_1 的最小值;

(3) 若点 A 的坐标为 $(2, \frac{3}{2})$, 记线段 AB 到 $\odot O$ 的“平移距离”为 d_2 , 直接写出 d_2 的取值范围.

【答案】

(1) 平行; P_3

$$(2) d_{1\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \frac{3}{2} \leq d_2 \leq \frac{\sqrt{39}}{2}$$

$$d_{2\min} = AA'_1 = \frac{3}{2}$$

$$d_{2\min} = AA'_2 = AA'_3 = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

【解析】

(1) 由定义内容, 结合图形可知, 可下结论, 难度易

(2) 解: 如图所示, $D(0, 2\sqrt{3})$, $E(-2, 0)$, $A'B' = 1$

$A'B' \parallel DE$, M 为 $A'B'$ 中点

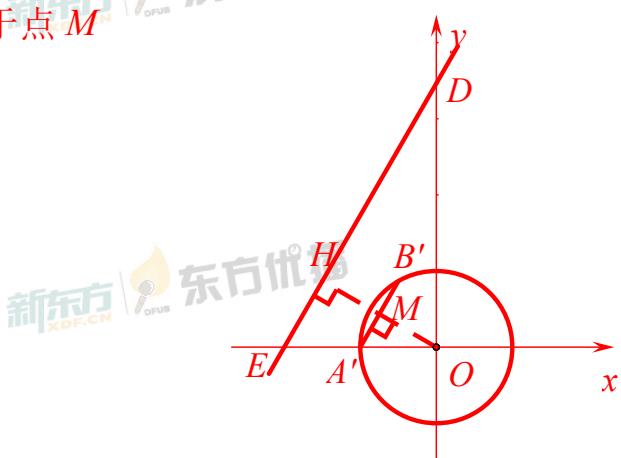
作 $OH \perp DE$ 交 ED 于点 H , 交 $A'B'$ 于点 M

$\because OD = 2\sqrt{3}$, $\angle ODH = 30^\circ$

$$\therefore OH = \sqrt{3}$$

$$\therefore A'M = \frac{1}{2}, \quad \angle MA'O = 60^\circ$$

$$\therefore OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\therefore HM = OH - OM = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$d_{1\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) 解: 当 O, A' , A 三点共线时, 如图.

最小值为 $\frac{3}{2}$.

当 $AA_1' = AA_2'$ 时, $A(2, \frac{3}{2})$

连接 OA_2' , $\angle B_2'A_2'A_1' = 90^\circ$, $\angle B_2'A_2'O = 60^\circ$

则 $\angle OA_2'A_1' = 30^\circ$

$$OA_2' = 1, OM = \frac{1}{2}, A_2'M = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore MA = 3, AA_2' = \sqrt{9 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

$$\therefore \frac{3}{2} \leq d_2 \leq \frac{\sqrt{39}}{2}$$

