2020年高考全国甲卷数学（理）答案

注意事项：
1. 本试卷分选择题、填空题和解答题三部分。
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔填写。
3. 全部答案在对应答题区域内进行作答，未在对应的答题区域内作答的均不得分。
4. 考试结束后，将本答题卡和试卷一并交回。

一、选择题（共40分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	D	B	C	B	C	A	B	D	C	A	C

二、填空题（共30分）

13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. 36

15. $2\sqrt{3}$

16. ①③④

三、解答题（共 80 分）

17.

解：(1) ∵ $\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C=\sin B\sin C$

设 $\triangle ABC$ 三边分别为 a,b,c

由正弦定理可得

$a^2-b^2-c^2=bc$

∴ $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$

∴ 由余弦定理得 $\cos A=-\frac{1}{2}$

∵ A 为 $\triangle ABC$ 的内角．则 $A=120^\circ$

(2) 令周长 $l=a+b+c$

∵ $BC=3$ ∴ $a=3$

∴ $b^2+c^2+bc=9$

∴ $(b+c)^2=9+bc\le 9+\frac{(b+c)^2}{4}$

∴ $\frac{3}{4}(b+c)^2\le 9$

∴ $(b+c)^2\le 12$

∴ $b+c\le 2\sqrt{3}$

∴ $l=a+b+c\le 3+2\sqrt{3}$

当 $b=c=\sqrt{3}$ 时，等号成立

∴ 周长的最大值为 $3+2\sqrt{3}$

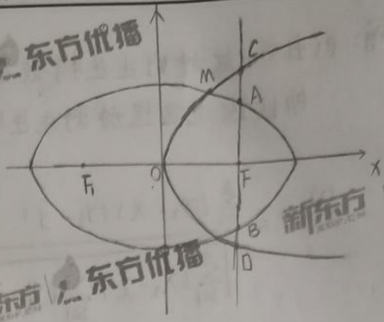
18. 解：(1) 由样区这种野生生物数量的平均数为：$\bar{y}=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}y_i=60$

所以该地区这种野生生物数量的估计值为：$200\bar{y}=12000$

(2) $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{800}{\sqrt{80\times9000}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx0.94$

(3) 分层抽样的方法，由(2)知植物覆盖面积与野生动物数量相关性很强。因为植物覆盖面积差异很大，会导致野生动物活动范围存在大的差异，因此为了提高样本的代表性，要采取分层抽样的抽样方法。

19. 解：



(1) 右焦点 $F(c,0)(c>0)$，设抛物线方程为 $y^2=2px\ (p>0)$，则抛物线的焦点为 $(\frac{p}{2},0)$

$\therefore \frac{p}{2}=c$，$p=2c$

$\therefore$ 抛物线方程为：$y^2=4cx$ ①

C、D点横坐标为 c，带入①：

$y^2=4c^2$，$y=\pm 2c$

$\therefore C(c,2c)\quad D(c,-2c)$

$|CD|=4c$

$\therefore |AB|=\frac{3}{4}|CD|=3c$

$\therefore A(c,\frac{3}{2}c)\quad B(c,-\frac{3}{2}c)$

C_1 的另一个焦点坐标为 $F_1(-c,0)$

$AF_1=\sqrt{(\frac{3}{2}c)^2+(2c)^2}=\frac{5}{2}c$

$AF=\frac{3}{2}c$

$\therefore 2a=\frac{5}{2}c+\frac{3}{2}c=4c$

$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

(2) 对于 C_1：$e=\frac{1}{2}$

$\therefore a=2c$，$b=\sqrt{3}c$

C_1：$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$ ②

C_2：$y^2=4cx$ ③

将③代入②：$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{4cx}{3c^2}=1$

$3x^2+16cx-12c^2=0$

$x_1=\frac{2}{3}c$，$x_2=-6c$（$x>0$，舍去）

$\therefore M$ 纵坐标满足：$y^2=4c\cdot\frac{2}{3}c=\frac{8}{3}c^2$

$\therefore y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}c$

$M(\frac{2}{3}c,\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}c)\quad F(c,0)$

$|MF|=\sqrt{(\frac{1}{3}c)^2+(\frac{2\sqrt{6}}{3}c)^2}=\frac{5}{3}c=5$

$\therefore c=3$

C_1：$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

C_2：$y^2=12x$

20. 证明：(1)

$\because M.N$ 为矩形 B_1BCC_1 中 $BC.B_1C_1$ 中点

$\therefore MN // BB_1$

又 $\because$ 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中. $AA_1 // BB_1$

$\therefore MN // AA_1$

又 $\because$ N 为 B_1C_1 中点．$\triangle A_1B_1C_1$ 为正三角形

$\therefore A_1N \perp B_1C_1$

又 $\because B_1C_1 \perp B_1B$

$\therefore B_1C_1 \perp AA_1$

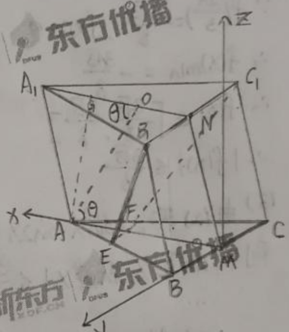
$\because AA_1,\ A_1N$ 为平面 AA_1NM 中两相交直线

$\therefore B_1C_1 \perp$ 平面 AA_1NM

又 $\because B_1C_1 \subset$ 平面 B_1C_1FE

$\therefore$ 平面 $A_1AMN \perp$ 平面 EB_1C_1F

(2) 解：设 $AB=2$. 如图建立空间直角坐标系



$\because AO //$ 平面 EFC_1B_1，$AO \subset$ 平面 $AOPN$

平面 $EFC_1B_1 \cap$ 平面 $AOPN = PN$

$\therefore AO // PN$

又 $\because AP // ON$. $\therefore$ 四边形 $APON$ 为平行四边形

$\therefore AP = ON,\ AO = PN$

设 $\angle OAP = \theta$，过 A 作 $AG \perp A_1N$. 交 A_1N 于 G

$\because AO = AB = 2$，则三棱柱的高 $AG = 2\sin\theta$.

$GO = 2\cos\theta$

$\therefore GA_1 = AO - GO = \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\cos\theta$

由此可得：

$B(0,1,0)$，$C(0,-1,0)$，$B_1(\frac{2}{\sqrt{3}}-2\cos\theta, 1, 2\sin\theta)$. $E(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}, 0)$

$\therefore \overrightarrow{EB_1} = (-2\cos\theta, \frac{2}{3}, 2\sin\theta)$. $\overrightarrow{CB} = (0,2,0)$

$$|\cos\langle\overrightarrow{EB_1}, \overrightarrow{CB}\rangle| = \left|\frac{\overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{EB_1}|}\right| = \left|\frac{\frac{4}{3}}{2\cdot\sqrt{4\cos^2\theta+4\sin^2\theta+(\frac{2}{3})^2}}\right| = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$\because EB_1$ 与 CB 夹角和 EB_1 与平面 AA_1MN 夹角 α 互余

$\therefore \sin\alpha = |\cos\langle\overrightarrow{EB_1}, \overrightarrow{CB}\rangle| = \frac{\sqrt{10}}{10}$

既直线 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

21. 解：(1) $f(x)=\sin^2x\cdot\sin2x=\frac{1}{2}(1-\cos2x)\sin2x=\frac{1}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x\sin2x=\frac{1}{2}\sin2x-\frac{1}{4}\sin4x$

$f'(x)=\cos2x-\cos4x=-(2\cos2x+1)(\cos2x-1)$

$\because \cos2x\in[-1,1]$

$\therefore \cos2x-1\le0$

令 $f'(x)\geqslant0$，得 $x\in(0,\frac{\pi}{3})\cup(\frac{2\pi}{3},\pi)$

令 $f'(x)<0$，得 $x\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上单调递增，在区间 $(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ 上单调递减，在区间 $(\frac{2\pi}{3},\pi)$ 上单调递增.

(2) 由(1)知，$f(x)=\frac{1}{2}\sin2x-\frac{1}{4}\sin4x$. $f(x)$ 周期为 π

$\because f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt3}{8}$，$f(\pi)=0$

$\therefore f(x)_{max}=\frac{3\sqrt3}{8}$

$\because f(\frac{2\pi}{3})=-\frac{3\sqrt3}{8}$，$f(0)=0$

$\therefore f(x)_{min}=-\frac{3\sqrt3}{8}$

$\therefore f(x)\in[-\frac{3\sqrt3}{8},\frac{3\sqrt3}{8}]$

$\therefore |f(x)|\le\frac{3\sqrt3}{8}$

(3) 由(2)知，$|\sin^2x\cdot\sin2x|\le\frac{3\sqrt3}{8}=(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}$. 有 $|\sin^22x\sin2^2x|\le\frac{3\sqrt3}{8}=(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}$

则，$|\sin^22^2x\sin2^4x|\le\frac{3\sqrt3}{8}=(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}$

…

$|\sin^22^{n-1}x\sin2^nx|\le\frac{3\sqrt3}{8}=(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}$

$\therefore |\sin^2x\sin2x\cdot\sin^22x\sin2^2x\cdots\sin^22^{n-1}x\sin2^nx|\le(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}n}$

即，$|\sin^2x\sin^32x\sin^32^2x\cdots\sin^32^{n-1}x\sin2^nx|\le(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}n}$

$|\sin^3x\cdot\sin^32x\cdots\sin^32^nx|=|\sin x(\sin^2x\sin^32x\sin^32^2x\cdots\sin^32^{n-1}x\sin2^nx)\cdot\sin^22^nx|\le(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}n}$

$\therefore \sin^2x\sin^22x\sin^24x\cdots\sin^22^nx\le(\frac{3}{4})^{\frac{n}{2}\cdot2}\le\frac{3^n}{4^n}$

22（选做）.

解：(1)

$\because C_1:\begin{cases}x=4\cos^2\theta\\y=4\sin^2\theta\end{cases}$，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\therefore C_1$的直角坐标方程为：$x+y=4$

$\because x=4\cos^2\theta \quad 0\le\cos^2\theta\le1$

$\therefore 0\le x\le4$

$\therefore C_1$的直角坐标方程为：$x+y-4=0\ (0\le x\le4)$

$\because C_2:\begin{cases}x=t+\frac{1}{t}\\y=t-\frac{1}{t}\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2 & ①\\y^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2 & ②\end{cases}$

①-② 得 $x^2-y^2=4$

$\because x=t+\frac{1}{t}$

当$t>0$时，$x\ge2$

当$t<0$时，$x\le-2$

$\therefore C_2$的直角坐标方程为：$x^2-y^2=4\ (x\le-2$ 或 $x\ge2)$

综上：C_1的直角坐标方程为：$x+y-4=0\ (0\le x\le4)$

C_2的直角坐标方程为：$x^2-y^2=4\ (x\le-2$ 或 $x\ge2)$

(2) C_1与C_2交点P：$\begin{cases}x+y-4=0\\x^2-y^2=4\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$

$\therefore P$点坐标为$(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$

设经过极点与P的圆的圆心坐标为$(a,0)$

$\therefore a^2=(a-\frac{5}{2})^2+(\frac{3}{2})^2$

$\therefore a=\frac{17}{10}$

$\therefore$圆的直角坐标方程为：$(x-\frac{17}{10})^2+y^2=(\frac{17}{10})^2$

$\therefore x^2+y^2-\frac{17}{5}x=0$

$\because\begin{cases}x^2+y^2=\rho^2\\x=\rho\cos\theta\end{cases}$

$\therefore$圆的极坐标方程为 $\rho=\frac{17}{5}\cos\theta$

综上：圆的极坐标方程为 $\rho=\frac{17}{5}\cos\theta$

23（选做）.

解：(1) 当 $a=2$ 时，$f(x)=|x-4|+|x-3|$

① 当 $x\le 3$ 时，$f(x)=4-x+3-x=7-2x$

② 当 $3<x\le 4$ 时，$f(x)=4-x+x-3=1$

③ 当 $x>4$ 时，$f(x)=x-4+x-3=2x-7$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}7-2x, & x\le 3\\ \quad , & 3<x\le 4\\ 2x-7, & x>4\end{cases}$$

又 $\because f(x)\ge 4$

即 ① 当 $x\le 3$ 时，$7-2x\ge 4$

$\therefore x\le \frac{3}{2}$

② 当 $3<x\le 4$ 时，$1\ge 4$（舍去）

③ 当 $x>4$ 时，$2x-7\ge 4$

$\therefore x\ge \frac{11}{2}$

综上，不等式 $f(x)\ge 4$ 的解集为 $(-\infty,\frac{3}{2}]\cup[\frac{11}{2},+\infty)$

(2) $|x-a^2|+|x-2a+1|\ge |x-a^2-(x-2a+1)|=|a^2-2a+1|=(a-1)^2$

$\because f(x)\ge 4$

$\therefore (a-1)^2\ge 4$

$\therefore a\ge 3$ 或 $a\le -1$

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$