2020 年北京市高考数学答案

注意事项：
1. 本试卷分选择题、填空题和解答题三部分。
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号用**黑色字迹的签字笔**填写。
3. 全部答案在对应答题区域内进行作答，未在对应的答题区域内作答的均不得分。
4. 考试结束后，将本答题卡和试卷一并交回。

一、选择题（共 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	C	D	A	D	B	B	C	A

二、填空题（共 25 分）

11. $(0,+\infty)$

12. $(3,0)$；$\sqrt{3}$

13. $\sqrt{5}$；-1

14. $\frac{\pi}{2}$（答案满足 $\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$ 即可）

15. ①②③

三、解答题（共 85 分）

16.

(1) 证明：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$C_1D_1 \underline{\parallel} AB$，

所以四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，

所以 $BC_1 \parallel AD_1$，

因为 $AD_1 \subset$ 面 AD_1E，$BC_1 \not\subset$ 面 AD_1E，

所以 $BC_1 \parallel$ 面 AD_1E.

(2) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1 \perp AD$，$AA_1 \perp AB$，$AD \perp AB$，

以 A 为原点，AD，AB，AA_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，

设正方体边长为 1.

则 $A(0,0,0)$，$A_1(0,0,1)$，$D_1(1,0,1)$，$E(0,1,\frac{1}{2})$，

则 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AD_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{AE}=(0,1,\frac{1}{2})$，

设平面 AD_1E 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+z=0\\ y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $\begin{cases}x=2\\ y=1\\ z=-2\end{cases}$，

所以 $\vec{m}=(2,1,-2)$，

设直线 AA_1 与面 AD_1E 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{AA_1}\rangle|=\left|\frac{-2}{1\times 3}\right|=\frac{2}{3}$，

所以直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.

17.

选择①:

(1) 因为$a+b=11$,

所以$b=11-a$,

由余弦定理知:$a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos A$,

所以$a^2=(11-a)^2+49-2\times(11-a)\times7\times(-\frac{1}{7})$,

所以$a=8$.

(2) 由(1)知$a=8$,

所以$b=3$,

由余弦定理知:$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,

所以$\cos C=\frac{1}{2}$,

所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times8\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

选择②:

(1) 因为$a+b=11$,

所以$b=11-a$,

因为$\cos A=\frac{1}{8}$, $\cos B=\frac{9}{16}$, $A\in(0,\pi)$, $B\in(0,\pi)$,

所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$,

由正弦定理知:$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,

即$\frac{a}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{11-a}{\frac{5\sqrt{7}}{16}}$

所以$11a=66$,

所以$a=6$,

所以$b=5$.

17.

(2) 由(1)知

$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]$

$=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{3\sqrt{7}}{8}\times\frac{9}{16}+\frac{1}{8}\times\frac{5\sqrt{7}}{16}$

$=\frac{32\sqrt{7}}{128}$

$=\frac{\sqrt{7}}{4}$

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times5\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

18.

(1) 设"该校男生支持方案一"为事件A，设该校女生支持方案一"为事件B，

因所有学生对活动方案是否支持相互独立，

故由表格数据知所抽取的男生总人数为200+400=600人，

其中支持方案一人数为200人，所抽取的女生总人数为300+100=400人，

其中支持方案一人数为300人，

所以$P(A)=\frac{200}{600}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{300}{400}=\frac{3}{4}$.

(2) 设"从该校全体男生中随机抽取2人，全体女生中随机抽取1人，这3人中恰有2人支持方案一"为事件C，事件C包含两种情况：

①2名男生支持，1名女生不支持，

②1名男生支持，1名男生不支持，1名女生支持.

由(1)知$P(C)=C_2^2\times(\frac{1}{3})^2\times(1-\frac{3}{4})+C_2^2\times(\frac{1}{3})^1\times(\frac{2}{3})^1\times\frac{3}{4}=\frac{13}{36}$

(3) $P_0>P_1$

19.

(1) $f(x)$的定义域为R，

因为$f'(x)=-2x$，则令$f'(x)=-2$时，解得$x=1$，

所以$f(1)=11$，即切点为$(1,11)$，切线斜率为-2，

所以$f(x)$在$(1,11)$处的切线方程的点斜式为$y-11=-2(x-1)$，

整理得$2x+y-13=0$.

(2) 由(1)知$f'(x)=-2x$，则$f'(t)=-2t$，即切线斜率$k=-2t$，

因为$f(t)=12-t^2$，即切点$(t,12-t^2)$，

所以$f(x)$在$(t,f(t))$处的切线方程的点斜式为$y-(12-t^2)=-2t(x-t)$，

整理得：$y=-2tx+t^2+12$，

又因为切线与坐标轴围成三角形，所以$t\neq0$，

所以$x=0$时，$y=t^2+12$，设$A(0,t^2+12)$，则$|OA|=t^2+12$，

$y=0$时，$x=\frac{t^2+12}{2t}$，设$B(\frac{t^2+12}{2t},0)$，则$|OB|=\frac{t^2+12}{2|t|}$，

所以$S(t)=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}\cdot(t^2+12)\cdot\frac{t^2+12}{2|t|}=\frac{1}{4}|t|^3+6|t|+\frac{36}{|t|}\ (t\neq0)$，

不妨设$v=|t|\ (t\neq0)$，则$g(v)=\frac{1}{4}v^3+6v+\frac{36}{v}\ (v>0)$，

所以$g'(v)=\frac{3}{4}v^2+6-\frac{36}{v^2}$，

令$h(v)=g'(v)\ (v>0)$，则$h'(v)=\frac{3}{2}v+\frac{72}{v^3}>0$恒成立，

所以$h(v)$即$g'(v)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又因为$g'(v)=0$时，即$\frac{3}{4}v^2+6-\frac{36}{v^2}=0$，

化简得：$v^4+8v^2-48=0$，

令$s=v^2\ (s>0)$，则$s^2+8s-48=0$，

解得$s=4$(符合题意)或$s=-12$(舍)，

所以$s=v^2=4\ (v>0)$，则$v=2$，

所以$g'(2)=0$，

所以$g'(v)$与$g(v)$随v变化如下表所示：

19.

v	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$g'(v)$	$-$	0	$+$
$g(v)$	↘	极小值	↗

所以$g(v)$的最小值等于$g(v)$的极小值，即$g(v)_{min}=g(2)=32$，

所以$S(t)_{min}=g(v)_{min}=32$

所以$S(t)$最小值为32.

20.

(1) 由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$过点$A(-2,-1)$，可得$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，

又因$a=2b$，

所以$a^2=8$，$b^2=2$，

故椭圆C的方程为：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2) 方法一：由题意可知，直线l斜率存在，

因为直线过点$B(-4,0)$，所以设直线l的方程为：$y=k(x+4)$，

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=k(x+4)\end{cases}$，得$(4k^2+1)x^2+32k^2x+64k^2-8=0$.

因为直线与椭圆交于M，N两点，

$\Delta=(32k^2)^2-4(4k^2+1)(64k^2-8)=32(1-4k^2)>0$，

解得：$-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$.

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=\frac{-32k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{64k^2-8}{4k^2+1}$，且$x_1,x_2\neq-2$.

直线MA的方程为：$y+1=\frac{y_1+1}{x_1+2}(x+2)$，

令$x=-4$，得$y_P=\frac{-2(y_1+1)}{x_1+2}-1$，

同理，得：$y_Q=\frac{-2(y_2+1)}{x_2+2}-1$.

$$y_P+y_Q=-2\left(\frac{y_1+1}{x_1+2}+\frac{y_2+1}{x_2+2}\right)-2$$

$$=-2\cdot\frac{[k(x_1+4)+1](x_2+2)+[k(x_2+4)+1](x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}-2$$

$$=-2\cdot\frac{2kx_1x_2+(6k+1)(x_1+x_2)+16k+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}-2$$

$$=-2\cdot\frac{2k\cdot\frac{64k^2-8}{4k^2+1}+(6k+1)\cdot\frac{-32k^2}{4k^2+1}+16k+4}{\frac{64k^2-8}{4k^2+1}+2\cdot\frac{-32k^2}{4k^2+1}+4}-2$$

$$=0.$$

即$y_P=-y_Q$，

所以$\frac{|PB|}{|BQ|}=\frac{|y_P|}{|y_Q|}=1$.

20.

方法二：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(-4,y_P)$，$Q(-4,y_Q)$，

当直线 l 斜率为0时，经验证 $y_P=-y_Q$，

此时 $\frac{|PB|}{|BQ|}=\frac{|y_P|}{|y_Q|}=1$.

当直线 l 的斜率不为0时，设 l_{MN}：$x=ny-4$，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\\ x=ny-4\end{cases}$，得 $(n^2+4)y^2-8ny+8=0$，

$\Delta=(8n)^2-32(n^2+4)>0$，即 $n>2$ 或 $n<-2$.

则 $y_1+y_2=\frac{8n}{n^2+4}$，$y_1y_2=\frac{8}{n^2+4}$.

因为 A，M，P 三点共线，

所以 $k_{AM}=k_{AP}$，即 $\frac{y_1+1}{x_1+2}=\frac{y_P+1}{-2}$，

所以 $y_P=\frac{-2(y_1+1)}{x_1+2}-1=\frac{-2(y_1+1)}{ny_1-2}-1$，

同理 $y_Q=\frac{-2(y_2+1)}{ny_2-2}-1$，

$$y_P+y_Q=\frac{-2(y_1+1)}{ny_1-2}+\frac{-2(y_2+1)}{ny_2-2}-2$$

$$=\frac{-4ny_1y_2+(4-2n)(y_1+y_2)+8-2n^2y_1y_2+4n(y_1+y_2)-8}{(ny_1-2)(ny_2-2)}$$

$$=\frac{(-4n-2n^2)\cdot\frac{8}{n^2+4}+(4+2n)\cdot\frac{8n}{n^2+4}}{(ny_1-2)(ny_2-2)}$$

$$=0.$$

所以 $y_P=-y_Q$.

即 $\frac{|PB|}{|BQ|}=\frac{|y_P|}{|y_Q|}=1$

21.

(1) 数列$\{a_n\}$不满足性质①，举反例，$\frac{a_3^2}{a_2}=\frac{16}{3}$，$\frac{16}{3}$不在数列$\{a_n\}$中.

(2) 数列$\{a_n\}$同时满足性质①和性质②，

$\frac{a_i^2}{a_j}=\frac{(2^{i-1})^2}{2^{j-1}}=\frac{2^{2i-2}}{2^{j-1}}=2^{2i-j-1}$，又因为$a_{2i-j}=2^{2i-j-1}$，故满足性质①，

$a_k^2=a_n\cdot a_l$，$2^{2k-2}=2^{n-1}\cdot 2^{l-1}$，故$n+l=2k$，令$l=n-2$，则$k=n-1$，

此时$a_n=2^{n-1}=\frac{2^{2n-2}}{2^{n-2-1}}=\frac{a_k^2}{a_l}$，

且符合$k>l\geq 1$，故数列$\{a_n\}$同时满足性质①和性质②.

(3) 对于$a_1>0$，因为$\{a_n\}$是递增数列，

所以$a_n>0$.

由性质②，取$n=3$，

则存在$a_k,a_l(k>l)$，使得$a_3=\frac{a_k^2}{a_l}=\frac{a_k}{a_l}\cdot a_k>a_k$，

所以$k<3$，

所以$k=2$，$l=1$，

所以$a_3=\frac{a_2^2}{a_1}$，

所以当$n\leq 3$时，$\{a_n\}$是等比数列.

对于$a_1<0$，

由性质①，取$i=2$，$j=1$，则存在a_m使得$a_m=\frac{a_2^2}{a_1}$，

易证$a_m\neq a_2$，即$m\neq 2$，

若$a_m=a_1$，则只能$a_1^2=a_2^2$，此时$a_2=-a_1>0$，

所以当$n\geq 2$时，$a_n>0$，

取$i>2$，$j=1$，则根据性质①，存在m'使得$a_{m'}=\frac{a_i^2}{a_j}=\frac{a_i^2}{a_1}<\frac{a_2^2}{a_1}=a_1$，显然不存在$m'$，矛盾.

所以$m\geq 3$.

而$a_m\cdot a_1=a_2^2>0$，所以a_m与a_1同号，

所以$a_m<0$，又因为$\{a_n\}$是递增数列

21.

所以$a_3<0$，$a_2<0$，

所以a_1，a_2，a_3同号，

下面证明，如果当$n\le k$时，$a_n<0$，

那么$a_{k+1}<0$.

由性质①，取$i=k$，$j=k-1$.

则$\exists m$，使得$a_m=\frac{a_k^2}{a_{k-1}}$，

首先a_m与a_{k-1}同号，

所以$a_m<0$，

假设$m\le k$，则$a_m\le a_k<0$.

所以$|a_m|\ge|a_k|>0$，

而$a_{k-1}<a_k<0$，

所以$|a_{k-1}|>|a_k|>0$，

所以$|a_m|\cdot|a_{k-1}|>|a_k|^2$，即$a_m a_{k-1}>a_k^2$矛盾

所以$m\ge k+1$，又因为$a_m<0$，

所以$a_{k+1}<0$，

所以$\{a_n\}$同号且均为负数，

对于$\{a_n\}$，$a_3=\frac{a_k^2}{a_l}=\frac{a_k}{a_l}\cdot a_k>a_k$，

所以$k=2$，$l=1$，

所以$a_3=\frac{a_2^2}{a_1}$，

当$n\le 3$时，$\{a_n\}$是等比数列.

假设，当$n\le k$时，$\{a_n\}$是等比数列，设其通项公式为$a_n=a_1\cdot q^{n-1}(n\le k)$，

下面证明$a_{k+1}=a_1\cdot q^k$：由性质①，取$i=k$，$j=k-1$

则存在m，使得$a_m=\frac{a_i^2}{a_j}=\frac{(a_1\cdot q^{k-1})^2}{a_1\cdot q^{k-2}}=a_1\cdot q^k>a_1\cdot q^{k-1}>a_k$，所以$m>k$，

假设$m\ne k+1$，此时必有$m\ge k+2$，

即$a_m=a_1\cdot q^k$，而$a_k=a_1\cdot q^{k-1}$

考察a_{k+1}，

21.

由递增数列可知$a_k<a_{k+1}<a_m$，

即$a_1\cdot q^{k-1}<a_{k+1}<a_1\cdot q^k$.

令$a_{k+1}=a_1\cdot q^s$，此时$k-1<s<k$，

所以$s\notin N^*$.

另一方面：

由性质②，对于a_{k+1}，$\exists k', l'(k'>l')$，

使得$a_{k+1}=\frac{a_{k'}^2}{a_{l'}}=\frac{a_{k'}}{a_{l'}}\cdot a_{k'}>a_{k'}$，

所以$k'<k+1$，

即$k'\le k$且$l'<k$，

所以$a_{k+1}=\frac{a_{k'}^2}{a_{l'}}=\frac{a_1^2\cdot q^{2k'-2}}{a_1\cdot q^{l'-1}}=a_1\cdot q^{2k'-l'-1}$，

而$2k'-l'-1\in N^*$，$s\notin N^*$，$a_1\ne 0$.

所以$a_1\cdot q^{2k'-l'-1}\ne a_1\cdot q^s$.

而这两个都是a_{k+1}的表达式，所以矛盾，

所以$m=k+1$，

所以$a_{k+1}=a_1\cdot q^k$，

满足等比数列通项公式，

所以$\{a_n\}$为等比数列.