# 2020年高考全国丙卷数学（理）答案

注意事项：
1．本试卷分选择题、填空题和解答题三部分。
2．答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔填写。
3．全部答案在对应答题区域内进行作答，未在对应的答题区域内作答的均不得分。
4．考试结束后，将本答题卡和试卷一并交回。

## 一、选择题（共60分）

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | D | B | C | B | D | A | C | D | D | A | A |

## 二、填空题（共20分）

13. 7

14. 240

15. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$

16. ②③

三、解答题（共 70 分）

17. 解：(1) 由 $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-4n$, $a_2=3a_1-4=5$, $a_3=3a_2-4\times2=7$, …

猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+1$

证明如下：当 $n=1,2$ 时，显然成立 ①

假设 $n=k$ 时，即 $a_k=2k+1$ 成立，其中 $(k\in N^*)$，

由 $a_{k+1}=3a_k-4k=3(2k+1)-4k=2(k+1)+1$ ②

故假设成立，综上①②，所以 $a_n=2n+1$ $(n\in N^*)$

(2) 令 $b_n=2^n$, $a_n=(2n+1)2^n$

$\therefore S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n$

即 $S_n=3\times2+5\times2^2+7\times2^3+\cdots+(2n-1)\times2^{n-1}+(2n+1)\times2^n$ ①

则 $2S_n=3\times2^2+5\times2^3+7\times2^4+\cdots+(2n-1)\times2^n+(2n+1)\times2^{n+1}$ ②

①-②得 $-S_n=6+2(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(2n+1)\times2^{n+1}$

$=6+2\left(\dfrac{2^2-2^n\times2}{1-2}\right)-(2n+1)\times2^{n+1}$

$=-2+(-2n+1)\times2^{n+1}$

$\therefore S_n=2+(2n-1)2^{n+1}$

18. 解：(1) 记"该市空气质量等级为1, 2, 3, 4"分别为事件A, B, C, D.

则 $P(A)=\frac{2+16+25}{100}=0.43$

$P(B)=\frac{5+10+12}{100}=0.27$

$P(C)=\frac{6+7+8}{100}=0.21$

$P(D)=\frac{7+2+0}{100}=0.09$

(2) 记"一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值"为 $\bar{x}$

$\bar{x}=\frac{2+5+6+7}{100}\times 100+\frac{16+10+7+2}{100}\times 300+\frac{25+12+8+0}{100}\times 500$

$=20+105+225$

$=350$

∴ 一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值为350人次.

(3)

| | 人次≤400 | 人次>400 |
|---|---|---|
| 空气质量好 | 33 | 37 |
| 空气质量不好 | 22 | 8 |

$K^2=\frac{100(33\times 8-37\times 22)^2}{(33+37)(22+8)(33+22)(37+8)}\approx 5.82$

∵ $P(K^2>3.841)=0.05$

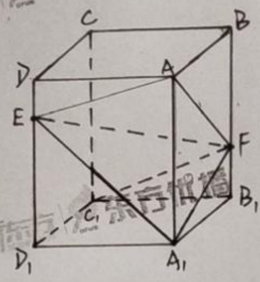
∴ 有95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关.

19. 证明：(1) 连接 $C_1F$. 由题意可得：

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中

$2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$

∴ $E$、$F$ 分别为 $DD_1$ 和 $BB_1$ 的三等分点



在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle C_1B_1F$ 中

$$\begin{cases} AD \underline{\parallel} C_1B_1 \\ DE \underline{\parallel} B_1F \\ \angle ADE = \angle C_1B_1F \end{cases}$$

∴ $AE \underline{\parallel} C_1F$

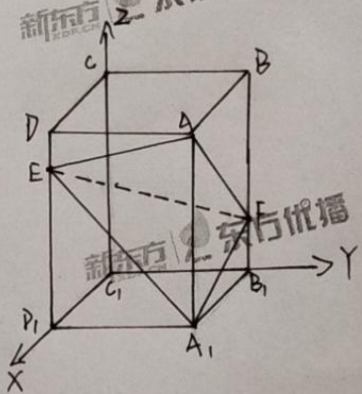
∴ $A$、$E$、$C_1$、$F$ 四点共面

∴ 点 $C_1$ 在平面 $AEF$ 内

(2) 以 $C_1$ 为原点，$C_1D_1$ 为 $x$ 轴，$C_1B_1$ 为 $y$ 轴，$C_1C$ 为 $z$ 轴，建立空间直角坐标系 $C_1-xyz$

$A(2,1,3)$ $B(2,0,2)$ $F(0,1,1)$ $A_1(2,1,0)$

$\overrightarrow{EF}=(-2,1,-1)$ $\overrightarrow{EA}=(0,1,1)$ $\overrightarrow{EA_1}=(0,1,-2)$



∴ 平面 $AEF$ 的法向量 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$

$$\begin{cases} -2x_1+y_1-z_1=0 \\ y_1+z_1=0 \end{cases}$$

设 $y_1=1$，$\vec{m}=(1,1,-1)$

同理：平面 $EFA_1$ 法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$

$$\begin{cases} -2x_2+y_2-z_2=0 \\ y_2-2z_2=0 \end{cases}$$

设 $z_2=1$，$\vec{n}=(\frac{1}{2},2,1)$

$$|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{|\frac{1}{2}+2-1|}{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

∴ $|\sin\theta|=\frac{\sqrt{42}}{7}$

∴ 二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$

20. 解：(1) 由题意可得：$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{25-m^2}{25}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$m^2=\frac{25}{16}$，$m=\frac{5}{4}$

∴C的方程为：$\frac{x^2}{25}+\frac{16y^2}{25}=1$

(2) 令点P的坐标为 $(x_1,y_1)$

点Q的坐标为 $(6,y_0)$，已知点B坐标为 $(5,0)$

∵ $|BP|=|BQ|$

∴ $\sqrt{(x_1-5)^2+y_1^2}=\sqrt{(6-5)^2+y_0^2}$ ①

又∵ $BP\perp BQ$

∴ $\frac{y_1}{x_1-5}\cdot\frac{y_0}{6-5}=1$

∴ $y_0=\frac{5-x_1}{y_1}$ 代入①式得：$(x_1-5)^2+y_1^2=\frac{(x_1-5)^2+y_1^2}{y_1^2}$

∴ $y_1=\pm1$

代入椭圆方程 $\frac{x^2}{25}+\frac{16y^2}{25}=1$，可得 $x=\pm3$

(i) 当 $x_1=3$，$y_1=1$ 时，$y_0=2$　$P(3,1)$　$Q(6,2)$

直线AP的方程为 $y=\frac{1}{8}(x+5)$，即 $8y-x-5=0$

点Q到AP的距离d为：$d=\frac{|2\times8-6-5|}{\sqrt{8^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{65}}$

AP的长度为 $|AP|=\sqrt{1+(\frac{1}{8})^2}\cdot[3-(-5)]=\sqrt{65}$

∴ $S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}|AP|\cdot d=\frac{1}{2}\times\sqrt{65}\times\frac{5}{\sqrt{65}}=\frac{5}{2}$

同理，当 $x_1=3$，$y_1=-1$，$y_0=-2$ 时，$S_{\triangle APQ}=\frac{5}{2}$

(ii) 当 $x_1=-3$，$y_1=1$ 时，$y_0=8$　$P(-3,1)$　$Q(6,8)$

直线AP的方程为：$2y-x-5=0$

点Q到AP的距离d为：$d=\frac{|2\times8-6-5|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}$

AP的长度为：$|AP|=\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}[-3-(-5)]=\sqrt{5}$

$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}|AP|\cdot d=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5}{2}$

同理，$x_1=-3$，$y_1=-1$，$y_0=-8$ 时

$S_{\triangle APQ}=\frac{5}{2}$

综上所述，$\triangle APQ$ 的面积为 $\frac{5}{2}$

21. 解：(1) $f'(x)=3x^2+b$.

$f'(\frac{1}{2})=0$

$\because f'(\frac{1}{2})=3\times(\frac{1}{2})^2+b=0$

$\therefore b=-\frac{3}{4}$

(2) $f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}$

令 $f'(x)=0$

$\therefore x=\pm\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,-\frac{1}{2})$ 单调递增，在 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 单调递减，在 $(\frac{1}{2},1)$ 单调递增.

又 $\because f(-\frac{1}{2})=f(1)=c+\frac{1}{4}$，$f(\frac{1}{2})=f(-1)=c-\frac{1}{4}$

即 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 的值域为 $[c-\frac{1}{4},c+\frac{1}{4}]$

$\because$ 存在零点

$\therefore c-\frac{1}{4}\le 0$，$c+\frac{1}{4}\ge 0$

即 $-\frac{1}{4}\le c\le\frac{1}{4}$

$\because f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 单调递增

当 $x<-1$ 时，$f(x)<f(-1)=c-\frac{1}{4}$

$\because -\frac{1}{4}\le c\le\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)$ 必小于 0

同理，当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=c+\frac{1}{4}$

$\because -\frac{1}{4}\le c\le\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)$ 必大于 0

即 $(-\infty,-1)$ 与 $(1,+\infty)$ 无零点.

即 $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

22. 解：(1) 由题设得：令 $x=0$，即 $2-t-t^2=0$，$t_1=1$（舍）或 $t_2=-2$

当 $t=-2$ 时，$y=12$

令 $y=0$，即 $2-3t+t^2=0$，$t_1=1$（舍）或 $t_2=2$

当 $t=2$ 时，$x=-4$

∴ $(0,12)$，$(-4,0)$ 为 C 与坐标轴交于 A、B 两点坐标

$|AB|=\sqrt{[0-(-4)]^2+(12-0)^2}=4\sqrt{10}$

(2) 由(1)可知，设 $l_{AB}: y=kx+b$

将 A、B 点坐标代入

$\begin{cases} 12=b \\ -4k+b=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=12 \\ k=3 \end{cases}$

∴ $y=3x+12$

令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入

$\rho\sin\theta=3\rho\cos\theta+12$

化简为 $\rho(\sin\theta-3\cos\theta)=12$

23. 证明：(1) ∵由 $a^2+b^2\geq 2ab$，$b^2+c^2\geq 2bc$，$c^2+a^2\geq 2ca$

可得 $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$（当且仅当 $a=b=c$ 可取等号）

∴ $(a+b+c)^2\geq 3ab+3bc+3ca$

$ab+bc+ca\leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$

∵ $a+b+c=0$

又∵ $abc=1$ 则 $a,b,c$ 不能为0，且 $a,b,c$ 不能取等值.

∴ $ab+bc+ac<0$

(2) ∵ $a+b+c=0$，$abc=1$

∴ $a,b,c$ 三数中必有正数，则可设 $c>0$

∵ $a+b+c=0$，则 $a+b=-c$，$abc=1$，则 $ab=\frac{1}{c}$

∴由韦达定理可得，$a,b$ 为 $x^2+cx+\frac{1}{c}=0$ 的两个解.

$\Delta=c^2-4\frac{1}{c}\geq 0$

$c^3\geq 4$

$c\geq \sqrt[3]{4}$

∴当 $c$ 为正时，$a,b$ 为负，此时 $c$ 为最大值，即 $\max\{a,b,c\}\geq \sqrt[3]{4}$