2020年高考全国丙卷数学（文）试卷

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（5分）已知集合$A=\{1,2,3,5,7,11\}$，$B=\{x\mid 3<x<15\}$，则$A\cap B$中元素的个数为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2．（5分）若$\overline{z}(1+i)=1-i$，则$z=$（　　）

A. $1-i$　　B. $1+i$　　C. $-i$　　D. i

3．（5分）设一组样本数据x_1，x_2，…，x_n的方差为0.01，则数据$10x_1$，$10x_2$，…，$10x_n$的方差为（　　）

A. 0.01　　B. 0.1　　C. 1　　D. 10

4．（5分）$Logistic$模型是常见数学模型之一，可应用于流行病学领域，有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数$I(t)$（t的单位：天）的$Logistic$模型：$I(t)=\dfrac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}$，其中$K$为最大确诊病例数，当$I(t^*)=0.95K$时，标志着已初步遏制疫情，则$t^*$约为（$\ln 19\approx 3$）（　　）

A. 60　　B. 63　　C. 66　　D. 69

5．（5分）已知$\sin\theta+\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})=1$，则$\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6．（5分）在平面内，A，B是两个定点，C是动点，若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1$，则点$C$的轨迹是（　　）

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 抛物线　　D. 直线

7．（5分）设O为坐标原点，直线$x=2$与抛物线$C:y^2=2px(p>0)$交于D，E两点，

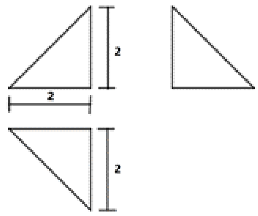
若 $OD \perp OE$，则 C 的焦点坐标为（　　）

A. $(\frac{1}{4},0)$　　B. $(\frac{1}{2},0)$　　C. $(1,0)$　　D. $(2,0)$

8. （5 分）点 $(0,-1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 距离的最大值为（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

9. （5 分）右图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是（　　）



A. $6+4\sqrt{2}$

B. $4+4\sqrt{2}$

C. $6+2\sqrt{3}$

D. $4+2\sqrt{3}$

10. （5 分）设 $a=\log_3 2$，$b=\log_5 3$，$c=\frac{2}{3}$，则（　　）

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

11. （5 分）在 ΔABC 中，$\cos C=\frac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则 $\tan B=$（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $4\sqrt{5}$　　D. $8\sqrt{5}$

12. （5 分）已知函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}$，则

A. $f(x)$ 的最小值为 2

B. $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\pi$ 对称

D. $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. （5 分）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geq 0, \\ 2x-y\geq 0, \\ x\leq 1, \end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为________.

14．（5 分）设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线为$y=\sqrt{2}x$，则$C$的离心率为________.

15．（5 分）设函数$f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x+a}$.若$f'\left(1\right)=\dfrac{e}{4}$，则$a=$_______.

16.（5 分）已知圆锥的底面半径为 1，母线长为 3，则该圆锥内半径最大的球的体积_______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=4$，$a_3-a_1=8$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记S_n为数列$\{\log_3 a_n\}$的前 n 项和. 若$S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$，求m.

18.（12 分）

某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表(单位:天)：

空气质量等级 \ 锻炼人次	[0,200]	(200,400]	(400,600]
1（优）	2	16	25
2（良）	5	10	12
3（轻度污染）	6	7	8
4（中度污染）	7	2	0

（1）分别估计该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率；

（2）求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值（同组中的数据用该组区间的中点值

为代表）；

（3）若某天的空气质量等级为 1 或 2，则称这天“空气质量好”：若某天的空气质量等级为 3 或 4，则称这天“空气质量不好”。根据所给数据，完成下面的列联2×2表，并根据列联表，判断是否有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

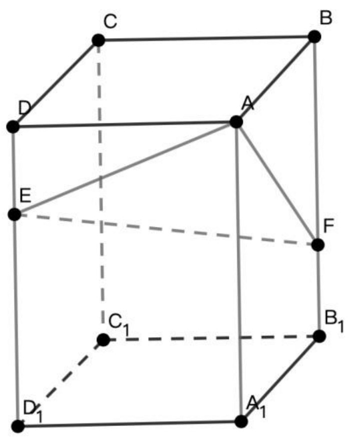
	人次≤400	人次>400
空气质量好		
空气质量不好		

附： $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. （12 分）

如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E，F分别在棱DD_1，BB_1上，且$2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$.证明：



（1）当$AB=BC$时，$EF\perp AC$；

（2）点C_1在平面AEF内.

20. （12 分）

已知函数$f(x)=x^3-kx+k^2$

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）若$f(x)$有三个零点，求k的取值范围.

21. （12 分）

已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$A$，$B$分别为$C$的左、右顶点。

（1）求C的方程；

（2）若点P在C上，点Q在直线$x=6$上，且$|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求$\triangle APQ$的面积.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

22．在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases} x=2-t-t^2 \\ y=2-3t+t^2 \end{cases}$（$t$为参数且$t\neq1$），$C$与坐标轴交于$A$，$B$两点.

(1) 求$|AB|$；

(2) 以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线AB的极坐标方程.

[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

23．设$a,b,c\in R$，$a+b+c=0$，$abc=1$.

（1）证明：$ab+bc+ca<0$；

（2）用$max\{a,b,c\}$表示a，b，c的最大值，证明：$max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$.

2020 年高考全国丙卷数学（文）答案

2020．07

一、选择题（共 7 道小题，每小题 6 分，共 42 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	C	B	A	B	B	C	A	C	D

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 7

14. $\sqrt{3}$

15. 1

16. $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}$

三、解答题（共 70 分）

（一）必考题（共 60 分）

17. （1）$a_n = 3^{n-1}$

（2）$m = 6$

18. （1）

$P(A) = 0.43$
$P(B) = 0.27$
$P(C) = 0.21$
$P(D) = 0.09$

（2）一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值为 350 人次。

（3）

	人次≤400	人次＞400	合计
空气质量好	33	37	70
气质量不好	22	8	30

合计	55	45	100

有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关。

19.（1）证明：当 $AB=BC$ 时，$EF\perp AC$

当 $AB=BC$ 时，四边形 $ABCD$ 为正方形

$\because E$、F 分别在 DD_1 和 BB_1

$\therefore EF\subset$ 平面 BB_1D_1D

$\because$ 在正方形$ABCD$中，

BD、AC为对角线

$\therefore AC\perp BD$

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

$DD_1\perp$ 面$ABCD$

$\therefore DD_1\perp AC$

$\because AC\perp DD_1$，$AC\perp BD$，$BD\cap DD_1=D$

$\therefore AC\perp$ 面BB_1D_1D

$\therefore AC\perp EF$

（2）证明：点 C_1 在平面 AEF 内，连接 C_1F，

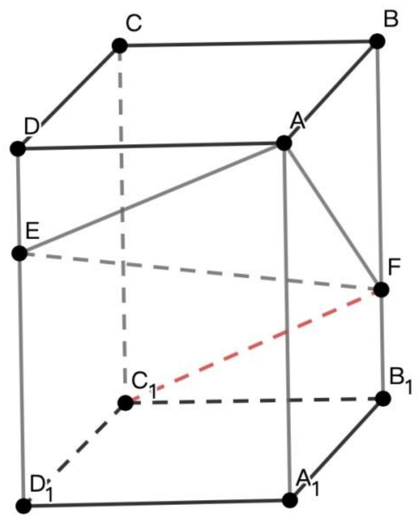
由题意可得：

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中

$2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$，

$\therefore E$，F 分别为 DD_1 和 BB_1 的三等分点

在$\triangle ADE$ 和$\triangle C_1B_1F$ 中



$$\begin{cases} AD \underline{\underline{//}} C_1B_1 \\ DE \underline{\underline{//}} B_1F \\ \angle ADE=\angle C_1B_1F \end{cases}$$

$\therefore AE \underline{\underline{//}} C_1F$

$\therefore A$、E、C_1、F 四点共面，

综上所述，点 C_1 在平面 AEF 内

20. （1） $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{\frac{k}{3}})$ 和 $(\sqrt{\frac{k}{3}},+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\sqrt{\frac{k}{3}},\sqrt{\frac{k}{3}})$ 上单调递减

（2） $0<k<\frac{4}{27}$

21. （1） $C:\frac{x^2}{25}+\frac{16y^2}{25}=1$

（2） $S_{\Delta APQ}=\frac{5}{2}$

（二）选考题（共 60 分）

22. （1） $|AB|=4\sqrt{10}$

（2） $\rho(\sin\theta-3\cos\theta)=12$

23. （1）证明：由 $a^2+b^2\geqslant 2ab$， $b^2+c^2\geqslant 2bc$， $c^2+a^2\geqslant 2ca$，

可得 $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$(当且仅当 $a=b=c$ 可取等号)

$\therefore (a+b+c)^2\geqslant 3ab+3bc+3ca$

$ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2$

$\because a+b+c=0$

又 $\because abc=1$，则

a， b， c 不能为 0，且 a， b， c 不能取等值

$\therefore ab+bc+ac<0$

（2）证明： $\because a+b+c=0$， $abc=1$

$\therefore a$， b， c 三数中必有正数，则可设 $c>0$

$\because a+b+c=0$，则 $a+b=-c$， $abc=1$ 则 $ab=\frac{1}{c}$

$\therefore$ 由韦达定理可得， a， b 为 $x^2+cx+\frac{1}{c}=0$ 的两个解

$\Delta=c^2-4\frac{1}{c}\geqslant 0$

$c^3 \geqslant 4$

$c \geqslant \sqrt[3]{4}$

$\therefore$ 当 c 为正时，a，b 为负，此时 c 为最大值即 $max\{a,b,c\} \geqslant \sqrt[3]{4}$.