

2020 年高考全国丙卷数学(文) 答案

注意事项:

1. 本试卷分选择题、填空题和解答题三部分。
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔填写。
3. 全部答案在对应答题区域内进行作答,未在对应的答题区域内作答的均不得分。
4. 考试结束后,将本答题卡和试卷一并交回。

一、选择题(共 60 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	C	C	B	A	B	B	C	A	C	D

二、填空题(共 20 分)

13. 7

14. $\sqrt{3}$

15. 1

16. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

三、解答题 (共 70 分)

17. 解: (1) $a_1 + a_2 = a_1 + a_1 q = a_1(1+q) = 4$ ①

$a_3 - a_1 = a_1(q^2 - 1) = a_1(1+q)(q-1) = 8$ ②

① \div ② 得: $\frac{1}{q-1} = \frac{1}{2}$

$\therefore q = 3$

$\therefore a_1 + a_2 = a_1 + 3a_1 = 4a_1 = 4$

$\therefore a_1 = 1$

$\therefore a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3^{n-1}$

(2) 令 $b_n = \log_3 a_n = \log_3(3^{n-1}) = n-1$, $\{b_n\}$ 是首项为 0, 公差为 1 的等差数列

$S_m = \frac{[0+(m-1)] \cdot m}{2} = \frac{(m-1) \cdot m}{2}$

$S_{m+1} = \frac{m \cdot (m+1)}{2}$

$S_{m+3} = \frac{(m+2)(m+3)}{2}$

$\therefore S_m + S_{m+1} = S_{m+3}$

即: $\frac{(m-1)m}{2} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{(m+2)(m+3)}{2}$

化简得: $(m-6)(m+1) = 0$

$\therefore m = 6$

18. 解: (1) 记“该市空气质量等级为 A, B, C, D”分别为事件 A, B, C, D

$$P(A) = \frac{2+16+25}{100} = 0.43$$

$$P(B) = \frac{5+10+12}{100} = 0.27$$

$$P(C) = \frac{6+7+8}{100} = 0.21$$

$$P(D) = \frac{7+2+0}{100} = 0.09$$

(2) 记“一天中到该公司报账的平均人次的估计值为”又

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2+5+6+7}{100} \times 100 + \frac{16+10+7+2}{100} \times 300 + \frac{25+12+8+0}{100} \times 500 \\ &= 20 + 105 + 225 \\ &= 350 \end{aligned}$$

∴ 一天中到该公司报账的平均人次的估计值为 350 人次

(3)

	人次 ≤ 400	人次 > 400
空气质量好	33	37
空气质量不好	22	8

$$k^2 = \frac{100(33 \times 8 - 22 \times 37)^2}{(33+37)(22+8)(33+22)(37+8)} \approx 5.82$$

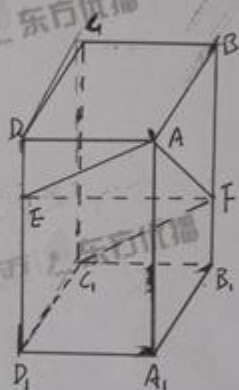
$$\therefore P(k^2 > 3.841) = 0.05$$

∴ 有 95% 的把握认为一天中到该公司报账的人次与该市当天的空气质量有关

19. 解: (1) 证明: 当 $AB=BC$ 时, $EF \perp AC$
 当 $AB=BC$ 时, 四边形 $ABCD$ 为正方形
 $\because E, F$ 分别在 DD_1 和 BB_1 上
 $\therefore EF \subset$ 平面 BB_1D_1D
 \because 在正方形 $ABCD$ 中
 BD, AC 为对角线
 $\therefore AC \perp BD$
 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中
 $DD_1 \perp$ 面 $ABCD$
 $\therefore DD_1 \perp AC$
 $\because AC \perp DD_1, AC \perp BD, BD \cap DD_1 = D$
 $\therefore AC \perp$ 面 BB_1D_1D
 $\therefore AC \perp EF$

(2) 证明: 点 G 在平面 AEF 内
 连接 GF
 由题意可得:
 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中
 $DE = ED_1, BF = FB_1$
 $\therefore E, F$ 分别为 DD_1 和 BB_1 的中点
 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle GB_1F$ 中

$$\begin{cases} AD \perp \angle B_1 \\ DE \perp \angle B_1F \\ \angle ADE = \angle GB_1F \end{cases}$$
 $\therefore AE \perp GF$
 $\therefore A, E, G, F$ 四点共面
 综上所述, 点 G 在平面 AEF 内



20. 解: (1) $f'(x) = 3x^2 - k$

当 $k \leq 0$ 时 $f'(x)$ 恒大于 0

$f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增

当 $k > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{k}{3}}$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{\frac{k}{3}})$ 上和 $(\sqrt{\frac{k}{3}}, +\infty)$ 上单调递增

在 $(-\sqrt{\frac{k}{3}}, \sqrt{\frac{k}{3}})$ 上单调递减

(2) 由题意可得, $f(x)$ 应先增后减再增, 不单调

$\therefore k > 0$

$$\therefore \begin{cases} f(-\sqrt{\frac{k}{3}}) > 0 \\ f(\sqrt{\frac{k}{3}}) < 0 \end{cases}$$

$$\text{代入得, } \begin{cases} -\sqrt{\frac{k}{3}} \cdot \frac{k}{3} + \sqrt{\frac{k}{3}} \cdot k + k^2 > 0 \\ \sqrt{\frac{k}{3}} \cdot \frac{k}{3} - \sqrt{\frac{k}{3}} \cdot k + k^2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{得 } -\frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{k} < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore 0 < k < \frac{4}{3}$$

21. 解: (1) 由题意可知: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{25-m^2}{25}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $m^2 = \frac{25}{16}$, $m = \frac{5}{4}$

$\therefore C$ 的方程为: $\frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{25} = 1$

(2) 令点 P 的坐标为 (x_1, y_1)

点 Q 的坐标为 $(6, y_0)$, 已知 B 点坐标为 $(5, 0)$

$\therefore |BP| = |BQ|$

$\therefore \sqrt{(x_1-5)^2 + y_1^2} = \sqrt{(6-5)^2 + y_0^2}$

又: $BP \perp BQ$

$\therefore \frac{y_1}{x_1-5} \cdot \frac{y_0}{6-5} = -1$

$\therefore y_0 = \frac{5-x_1}{y_1}$ 代入①或得:

$(x_1-5)^2 + y_1^2 = \frac{(x_1-5)^2 + y_1^2}{y_1^2}$

$\therefore y_1 = \pm 1$

代入椭圆方程 $\frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{25} = 1$ 可得 $x = \pm 3$

(i) 当 $x_1 = 3, y_1 = 1$ 时, $y_0 = 2$

$P(3, 1), Q(6, 2)$

直线 AP 的方程为 $y = \frac{1}{2}(x+5)$, 即 $8y - x - 5 = 0$

点 Q 到 AP 的距离 $d = \frac{|2 \times 8 - 6 - 5|}{\sqrt{8^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{65}}$

AP 的长度 $|AP| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \cdot |3 - (-5)| = \sqrt{65}$

$\therefore S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} |AP| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{65} \cdot \frac{5}{\sqrt{65}} = \frac{5}{2}$

同理, 当 $x_1 = 3, y_1 = -1$ 时, $y_0 = -2, S_{\triangle APQ} = \frac{5}{2}$

(ii) 当 $x_1 = -3, y_1 = 1$ 时, $y_0 = 8$

$P(-3, 1), Q(6, 8)$

直线 AP 的方程为: $2y - x - 5 = 0$

点 Q 到 AP 的距离 $d = \frac{|2 \times 8 - 6 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

AP 的长度 $|AP| = \sqrt{1 + \frac{4}{1}} \cdot |-3 - (-5)| = \sqrt{5}$

$\therefore S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} |AP| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{2}$

同理, 当 $x_1 = -3, y_1 = -1$ 时, $y_0 = -8, S_{\triangle APQ} = \frac{5}{2}$

综上所述 $S_{\triangle APQ} = \frac{5}{2}$

22. 解: (1) 由题设得: 令 $x=0$, 即 $2-t-t^2=0$, $t=1$ (舍) 或 $t=-2$

当 $t=-2$ 时, $y=12$

令 $y=0$, 即 $2-3t+t^2=0$, $t=1$ (舍) 或 $t=2$

当 $t=2$ 时, $x=-4$

$\therefore (0, 12), (-4, 0)$ 为 C 与坐标轴交点 A, B 两点坐标

$$|AB| = \sqrt{[0-(-4)]^2 + (12-0)^2} = 4\sqrt{10}$$

(2) 由 (1) 可知, 设 $l_{AB}: y=kx+b$

将 A, B 点坐标代入

$$\begin{cases} 12=b \\ -4k+b=0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} b=12 \\ k=3 \end{cases}$$

$$\therefore y=3x+12$$

令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 代入

$$r\sin\theta = 3r\cos\theta + 12$$

$$\text{化简为: } r(\sin\theta - 3\cos\theta) = 12$$

23. 解: (1) 证明: 由 $a^2+b^2 \geq 2ab$, $b^2+c^2 \geq 2bc$, $c^2+a^2 \geq 2ac$
 可得 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$ (当且仅当 $a=b=c$ 时取等)
 $\therefore (a+b+c)^2 \geq 3ab+3bc+3ca$, $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$
 $\because a+b+c=0$
 $\therefore abc=1$, 则
 a, b, c 不能为 0, 且 a, b, c 不能取等值
 $\therefore ab+bc+ac < 0$

(2) 证明: $\because a+b+c=0, abc=1$
 $\therefore a, b, c$ 三数中必有正数, $\therefore \frac{1}{a} > 0$
 $\because a+b+c=0$, $\therefore a+b=-c$,
 $abc=1$ 则 $ab = \frac{1}{c}$
 \therefore 由韦达定理可得, a, b 为 $x^2+cx+\frac{1}{c}=0$ 的两个解
 $\Delta = c^2 - 4 \cdot \frac{1}{c} \geq 0$
 $c^3 \geq 4$
 $c \geq \sqrt[3]{4}$
 \therefore 当 c 为正时, a, b 为实, 此时 c 为最大值
 即 $\max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}$