2020 年高考全国丙卷数学（文）逐题解析

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（5 分）已知集合 $A=\{1,2,3,5,7,11\}$， $B=\{x|3<x<15\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【答案】B

【解析】由题可得，集合 $B=\{x|3<x<15\}$ 中的正整数有 4，5，6，7，8，9，10，11，12，13；集合 $A=\{1,2,3,5,7,11\}$，可得 $A\cap B=\{5,7,11\}$，故选 B

2．（5 分）若 $\bar{z}(1+i)=1-i$，则 $z=$（　　）

A. $1-i$　　B. $1+i$　　C. $-i$　　D. i

【答案】D

【解析】$\bar{z}(1+i)=1-i$

$\bar{z}=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1+i^2-2i}{1-i^2}=\dfrac{1-1-2i}{1-(-1)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$， $z=i$， 故选 D

3．（5 分）设一组样本数据 x_1，x_2，⋯， x_n 的方差为 0.01，则数据 $10x_1$，$10x_2$，⋯， $10x_n$ 的方差为（　　）

A. 0.01　　B. 0.1　　C. 1　　D. 10

【答案】C

【解析】$\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$

$S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}=0.01$

$$\overline{x'}=\frac{\sum_{i=1}^{n}10X_i}{n}=10\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=10\overline{x}$$

$$S'^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(10X_i-\overline{X}')^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(10X_i-10\overline{X})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}10^2(X_i-\overline{X})^2}{n}=100\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n}=100\Delta^2=1$$

故选 C

4．（5 分）*Logistic* 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域，有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$（t 的单位：天）的 *Logistic* 模型：$I(t)=\frac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}$，其中 K 为最大确诊病例数，当 $I(t^*)=0.95K$ 时，标志着已初步遏制疫情，则 t^* 约为（$\ln 19\approx 3$）（　　）

A. 60　　B. 63　　C. 66　　D. 69

【答案】C

【解析】

$$I(t^*)=\frac{K}{1+e^{-0.23(t^*-53)}}=0.95K$$

$$1=0.95+0.95e^{-0.23(t^*-53)}$$

$$0.05=0.95e^{-0.23(t^*-53)}$$

$$e^{0.23(t^*-53)}=\frac{0.95}{0.05}=19$$

$$\ln e^{0.23(t^*-53)}=\ln 19$$

$$0.23(t^*-53)\approx 3$$

故 $t^*\approx\frac{3}{0.23}+53\approx 66$，故选 C

5. （5 分）已知 $\sin\theta+\sin(\theta+\frac{\pi}{3})=1$，则 $\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【解析】$\because \sin\theta+\sin(\theta+\frac{\pi}{3})=1$

$\therefore \sin\theta+\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=1$

$\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=1$

$\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta)=1$

$\sqrt{3}\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=1$

$\therefore \sin(\theta+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}$

故选 B

6. （5 分）在平面内，A，B 是两个定点，C 是动点，若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1$，则点 C 的轨迹是（　　）

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 抛物线　　D. 直线

【答案】A

【解析】设 A，B 点坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，C 为 (x,y)

则 $\overrightarrow{AC}=(x-x_1,y-y_1)$，$\overrightarrow{BC}=(x-x_2,y-y_2)$

$\because \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1\Rightarrow(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=1$

$x^2-xx_2-xx_1+x_1x_2+y^2-yy_2+yy_1+y_1y_2=1$

$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2-1=0$

圆的一般方程为：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

$\therefore$ 点 C 的轨迹是为圆

故选 A

7. （5 分）设 O 为坐标原点，直线 $x=2$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 D， E 两点，若 $OD\perp OE$，则 C 的焦点坐标为（　　）

A. $(\frac{1}{4},0)$　　B. $(\frac{1}{2},0)$　　C. $(1,0)$　　D. $(2,0)$

【答案】B

【解析】当 $x=2$时，$y=\pm 2\sqrt{p}$

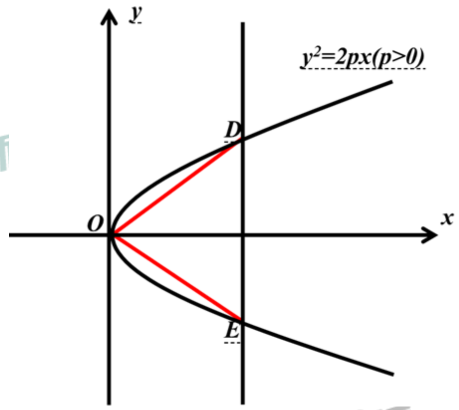
$OD=OE=2\sqrt{1+p}$

$OE=4\sqrt{p}$

$OD^2+OE^2=DE^2$

$\left(2\sqrt{1+p}\right)^2\times 2=4\left(\sqrt{p}\right)^2$

解得：　$p=1$



$\therefore F$ 的坐标为$(\frac{1}{2},0)$

故选：B

8. （5 分）点 $(0,-1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 距离的最大值为（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【答案】B

【解析】直线方程可变形为 $kx-y+k=0$，由点到直线的距离 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 得

点 $(0,1)$ 到该直线的距离为 $\frac{|1+k|}{\sqrt{k^2+1}}$

平方后可得 $\frac{(1+k)^2}{k^2+1}=1+\frac{2k}{k^2+1}=1+\frac{2}{k+\frac{1}{k}}\leqslant 2$

所以点 $(0,1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 的最大距离为 $\sqrt{2}$，故选：B

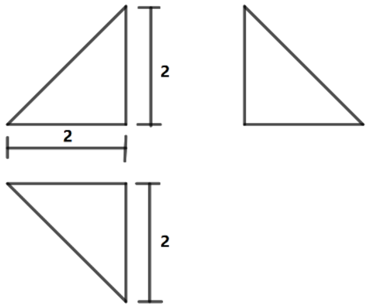
9. （5 分）右图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是（　　）

A. $6+4\sqrt{2}$

B. $4+4\sqrt{2}$

C. $6+2\sqrt{3}$

D. $4+2\sqrt{3}$



【答案】 C

【解析】由图可知，该立体图像的四个表面图像是由三个直角边为 2 的等腰直角三角形和一个边长为$2\sqrt{2}$的等边三角形组成

$\therefore$该几何体的表面积为$\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 3+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{6}=6+2\sqrt{3}$.

故选 C

10. （5 分）设$a=\log_3 2$，$b=\log_5 3$，$c=\frac{2}{3}$，则（　　）

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

【答案】A

【解析】$\because c=\frac{2}{3}\log_3 3=\log_3\sqrt[3]{9}$，$a=\log_3 2=\log_3\sqrt[3]{8}$，$\therefore a<c$

$\because c=\frac{2}{3}\log_5 5=\log_5\sqrt[3]{25}$，$b=\log_5 3=\log_5\sqrt[3]{27}$，$\therefore c<b$ ，故选 A

11. （5 分）在ΔABC中，$\cos C=\frac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则$\tan B=$（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $4\sqrt{5}$　　D. $8\sqrt{5}$

【答案】C

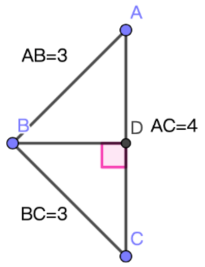
【解析】作$BD\perp AC$

$\because \cos C=\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore CD=AD=2$

$\therefore AB=BC=3$，即ΔABC为等腰三角形

$\therefore \tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$



即 $\tan B=\tan\left(\dfrac{B}{2}+\dfrac{B}{2}\right)=\dfrac{2\tan\dfrac{B}{2}}{1-\tan^2\dfrac{B}{2}}=\dfrac{2\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}}{1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\dfrac{\dfrac{4}{\sqrt{5}}}{\dfrac{1}{5}}=4\sqrt{5}$

故选 C

12.（5 分）已知函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$，则（　　）

A. $f(x)$的最小值为2

B. $f(x)$的图像关于y轴对称

C. $f(x)$的图像关于直线$x=\pi$对称

D. $f(x)$的图像关于直线$x=\dfrac{\pi}{2}$对称

【答案】D

【解析】A. $f(-\dfrac{\pi}{2})=-1-1=-2<2$，故 A 错

B. $f(-x)=\sin(-x)+\dfrac{1}{\sin(-x)}=-\sin x-\dfrac{1}{\sin x}$

$f(x)+f(-x)=0$

故 $f(x)$为奇函数，关于原点对称，故 B 错

C. $f(\pi-x)=\sin(\pi-x)+\dfrac{1}{\sin(\pi-x)}=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$

$\because f(\pi-x)=f(x)$

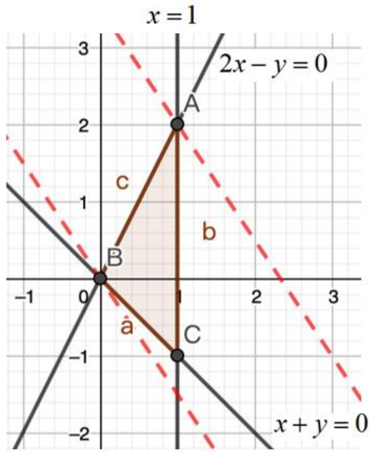
$\therefore f(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 成轴对称，故 C 错，D 正确，故选 D

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. （5 分）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geq 0, \\ 2x-y\geq 0, \\ x\leq 1, \end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为________.

【答案】7

【解析】将 x，y 的约束条件画入平面直角坐标系得：



由图可知，当在点 $(1,2)$ 时，$z=3x+2y$ 取最大值，此时 $z=3\times 1+2\times 2=7$

14. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线为 $y=\sqrt{2}x$，则 C 的离心率为________.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】$\because$ 渐近线为 $y=\sqrt{2}x$

$\therefore \frac{b}{a}=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}a$

C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}$

又 $\because$ $c^2=a^2+b^2=a^2+(\sqrt{2}a)^2=3a^2$

$\therefore e=\frac{\sqrt{3a^2}}{a}=\sqrt{3}$

15．（5 分）设函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x+a}$.若$f'\left(1\right)=\dfrac{e}{4}$，则$a=$______.

【答案】1

【解析】根据题意：

$$f'\left(x\right)=\frac{e^x\left(x+a\right)-e^x}{\left(x+a\right)^2}=\frac{e^x\left(x+a-1\right)}{\left(x+a\right)^2}$$

$$\therefore f'\left(1\right)=\frac{ea}{\left(1+a\right)^2}=\frac{e}{4}$$

$$\therefore a=1$$

16．（5 分）已知圆锥的底面半径为 1，母线长为 3，则该圆锥内半径最大的球的体积为______.

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}$

【解析】做圆锥的轴切面

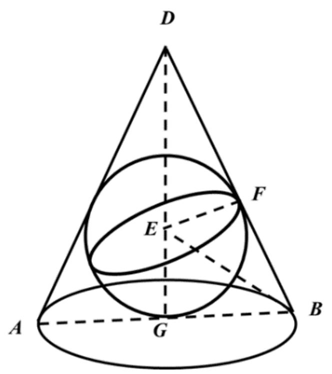
轴切面为一等腰三角形，腰长为圆锥母线长度，底为圆锥底面直径故圆锥内切球半径等于轴切面内切圆半径.

故三角形内切圆的半径为$r=\dfrac{2S}{a+b+c}$，其中 S 为三角形面积，a，b，c分别为三角形三边长

所以轴切面三角的高为$\sqrt{9^2-1^2}=2\sqrt{2}$，底为2

所以$S_{轴}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2=2\sqrt{2}$

所以$r=\dfrac{2\times2\sqrt{2}}{3+3+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即内切球半径为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



所以$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）

设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=4$，$a_3-a_1=8$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记S_n为数列$\{\log_3 a_n\}$的前 n 项和. 若$S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$，求m.

【答案】 （1）$a_n=3^{n-1}$ （2）$m=6$

【解析】 （1）$a_1+a_2=a_1+a_1q=a_1(1+q)=4$ ①

$a_3-a_1=a_1(q^2-1)=a_1(1+q)(q-1)=8$ ②

$\dfrac{①}{②}$得：$\dfrac{1}{q-1}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore q=3$

$a_1+a_2=a_1+3a_1=4a_1=4$

$\therefore a_1=1$

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=3^{n-1}$

（2）令$b_n=\log_3 a_n=\log_3(3^{n-1})=n-1$

$\therefore\{b_n\}$是首项为 0，公差为 1 的等差数列

$$S_m=\frac{[0+m-1]m}{2}=\frac{(m-1)m}{2}$$

$$S_{m+1}=\frac{(m+1)m}{2}$$

$$S_{m+3}=\frac{(m+3)(m+2)}{2}$$

$\because S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$

即$\dfrac{(m-1)m}{2}+\dfrac{(m+1)m}{2}=\dfrac{(m+3)(m+2)}{2}$

化简得$(m-6)(m+1)=0$

$\therefore m=6$

18.（12 分）

某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表(单位:天)：

空气质量等级 \ 锻炼人次	[0,200]	(200,400]	(400,600]
1（优）	2	16	25
2（良）	5	10	12
3（轻度污染）	6	7	8
4（中度污染）	7	2	0

（1）分别估计该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率；

（2）求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值（同组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

（3）若某天的空气质量等级为 1 或 2，则称这天“空气质量好”；若某天的空气质量等级为 3 或 4，则称这天“空气质量不好”。根据所给数据，完成下面的2×2列联表，并根据列联表，判断是否有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

	人次≤400	人次＞400
空气质量好		
空气质量不好		

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【答案】（1）

$P(A)=0.43$

$P(B)=0.27$

$P(C)=0.21$

$P(D)=0.09$

（2）一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值为 350 人次。

（3）

	人次≤400	人次>400	合计
空气质量好	33	37	70
气质量不好	22	8	30
合计	55	45	100

5%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关。

【解析】（1）记“该市空气质量等级为 1，2，3，4”分别为事件 A, B, C, D

则

$$P(A)=\frac{2+16+25}{100}=0.43$$

$$P(B)=\frac{5+10+12}{100}=0.27$$

$$P(C)=\frac{6+7+8}{100}=0.21$$

$$P(D)=\frac{7+2+0}{100}=0.09$$

（2）记“一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值”为 $\bar{x}$

$$\bar{x}=\frac{2+5+6+7}{100}\times 100+\frac{16+10+7+2}{100}\times 300+\frac{25+12+8+10}{100}\times 500$$

$=20+105+225$

$=350$

$\therefore$ 一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值为 350 人次。

（3）

	人次≤400	人次＞400	合计
空气质量好	33	37	70
气质量不好	22	8	30
合计	55	45	100

$K^2=\dfrac{100(33\times8-37\times22)^2}{(33+37)(22+8)(33+22)(37+8)}\approx5.82$

$\therefore P(K^2>3.841)=0.05$

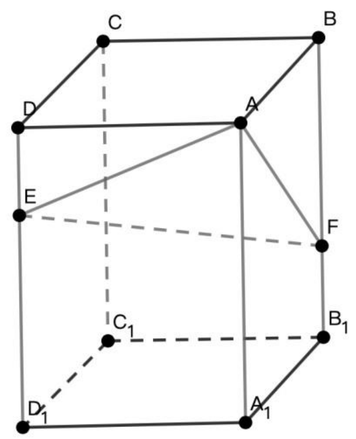
∴有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关。

19. （12 分）

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别在棱 DD_1， BB_1 上，且 $2DE=ED_1$， $BF=2FB_1$.证明：

（1）当 $AB=BC$ 时， $EF\perp AC$；

（2）点 C_1 在平面 AEF 内.



【解析】（1）证明：当 $AB=BC$ 时， $EF\perp AC$

当 $AB=BC$ 时，四边形 $ABCD$ 为正方形

$\because E$、F 分别在 DD_1 和 BB_1

$\therefore EF\subset$平面 BB_1D_1D

$\because$在正方形$ABCD$中，

BD、AC为对角线

$\therefore AC\perp BD$

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

$DD_1\perp$面$ABCD$

$\therefore DD_1\perp AC$

$\because AC\perp DD_1$，$AC\perp BD$，$BD\cap DD_1=D$

$\therefore AC\perp$ 面 BB_1D_1D

$\therefore AC\perp EF$

（2）证明：点 C_1 在平面 AEF 内

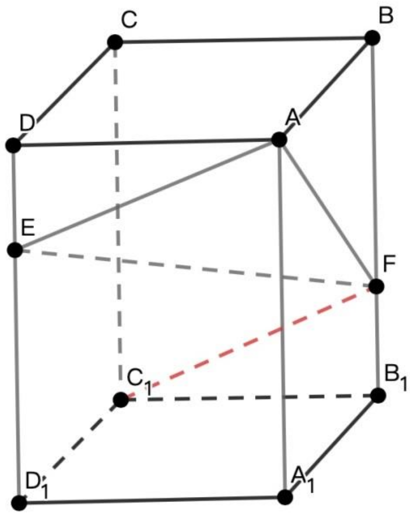
连接 C_1F，

由题意可得：

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中

$2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$，

$\therefore E$，F 分别为 DD_1 和 BB_1 的三等分点



在△ADE 和△C_1B_1F 中

$$\begin{cases} AD\underline{\underline{//}}C_1B_1 \\ DE\underline{\underline{//}}B_1F \\ \angle ADE=\angle C_1B_1F \end{cases}$$

$\therefore AE\underline{\underline{//}}C_1F$

$\therefore A$、E、C_1、F 四点共面，

综上所述，点 C_1 在平面 AEF 内

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=x^3-kx+k^2$

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 有三个零点，求 k 的取值范围.

【答案】（1）$f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{\frac{k}{3}})$ 和 $(\sqrt{\frac{k}{3}},+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\sqrt{\frac{k}{3}},\sqrt{\frac{k}{3}})$ 上单调递减

（2）$0<k<\frac{4}{27}$

【解析】（1）$f'(x)=3x^2-k$

当 $k\le 0$ 时，$f'(x)$ 恒大于 0

$f(x)$在R上单调递增

当$k>0$时，令$f'(x)=0$，$x=\pm\sqrt{\frac{k}{3}}$

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-\sqrt{\frac{k}{3}})$上和$(\sqrt{\frac{k}{3}},+\infty)$上单调递增，在$(-\sqrt{\frac{k}{3}},\sqrt{\frac{k}{3}})$上单调递减

（2）由题目可得，$f(x)$应先增后减再增，不单调

$\therefore k>0$

$$\therefore \begin{cases} f(-\sqrt{\frac{k}{3}})>0 \\ f(\sqrt{\frac{k}{3}})<0 \end{cases}$$

代入得$\begin{cases} -\sqrt{\frac{k}{3}}\cdot\frac{k}{3}+\sqrt{\frac{k}{3}}\cdot k+k^2>0 \\ \sqrt{\frac{k}{3}}\cdot\frac{k}{3}-\sqrt{\frac{k}{3}}\cdot k+k^2<0 \end{cases}$

得$-\frac{2}{3\sqrt{3}}<\sqrt{k}<\frac{2}{3\sqrt{3}}$

$\therefore 0<k<\frac{4}{27}$

21.（12 分）

已知椭圆C：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$的离心率为$\frac{\sqrt{15}}{4}$，$A$，$B$分别为$C$的左、右顶点。

（1）求C的方程；

（2）若点P在C上，点Q在直线$x=6$上，且$|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求$\triangle APQ$的面积.

【答案】（1）$C:\frac{x^2}{25}+\frac{16y^2}{25}=1$

（2）$S_{\Delta APQ}=\frac{5}{2}$

【解析】（1）由题意可得： $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{25-m^2}{25}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$m^2=\frac{25}{16}$， $m=\frac{5}{4}$

$\therefore C$ 的方程为：$\frac{x^2}{25}+\frac{16y^2}{25}=1$

（2）令点 P 的坐标为 (x_1,y_1)

点 Q 的坐标为 $(6,y_0)$，已知点 B 坐标为 $(5,0)$

$\because |BP|=|BQ|$

$\therefore \sqrt{(x_1-5)^2+y_1^2}=\sqrt{(6-5)^2+y_0^2}$ ①

又 $\because BP\perp BQ$

$\therefore \frac{y_1}{x_1-5}\cdot\frac{y_0}{6-5}=-1$

$\therefore y_0=\frac{5-x_1}{y_1}$ 代入①式得：

$(x_1-5)^2+y_1^2=\frac{(x_1-5)^2+y_1^2}{y_1^2}$

$\therefore y_1=\pm 1$

代入椭圆方程 $\frac{x^2}{25}+\frac{16y^2}{25}=1$ 可得 $x=\pm 3$

（ⅰ）当 $x_1=3$， $y_1=1$ 时， $y_0=2$

$P(3,1)$， $Q(6,2)$

直线 AP 的方程为 $y=\frac{1}{8}(x+5)$，即 $8y-x-5=0$

点 Q 到 AP 的距离 d 为： $d=\frac{|2\times 8-6-5|}{\sqrt{8^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{65}}$

AP 的长度为 $|AP|=\sqrt{1+(\frac{1}{8})^2}\cdot[3-(-5)]=\sqrt{65}$

$\therefore S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\cdot|AP|\cdot d=\frac{1}{2}\times\sqrt{65}\times\frac{5}{\sqrt{65}}=\frac{5}{2}$

同理，当$x_1=3,y_1=-1$，$y_0=-2$时，$S_{\triangle APQ}=\dfrac{5}{2}$

（ii）当$x_1=-3,y_1=1$时，$y_0=8$

$P(-3,1)$，$Q(6,8)$

直线AP的方程为：$2y-x-5=0$

点Q到AP的距离d为：$d=\dfrac{|2\times8-6-5|}{\sqrt{2^2+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}$

AP的长度为：$|AP|=\sqrt{1+(\dfrac{1}{2})^2}\left[-3-(-5)\right]=\sqrt{5}$

$\therefore S_{\triangle APQ}=\dfrac{1}{2}\cdot|AP|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{5}{2}$

同理，$x_1=-3$，$y_1=-1$，$y_0=-8$时

$S_{\triangle APQ}=\dfrac{5}{2}$

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

22．在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2-t-t^2\\y=2-3t+t^2\end{cases}$（$t$为参数且$t\neq1$），$C$与坐标轴交于$A$，$B$两点.

(1)求$|AB|$；

(2)以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线AB的极坐标方程.

【答案】（1）$|AB|=4\sqrt{10}$　（2）$\rho(\sin\theta-3\cos\theta)=12$

【解析】（1）由题设得：令$x=0$，即$2-t-t^2=0$，$t_1=1$（舍）或$t_2=-2$

当$t=-2$时，$y=12$.

令$y=0$，即$2-3t+t^2=0$，$t_1=1$（舍）或$t_2=2$

当$t=2$时，$x=-4$.

$\therefore(0,12)$、$(-4,0)$为C与坐标轴交于A、B两点坐标

$|AB|=\sqrt{[0-(-4)]^2+(12-0)^2}=4\sqrt{10}$

（2）由（1）可知，设$l_{AB}:y=kx+b$

将A、B点坐标代入

$\begin{cases}12=b\\-4k+b=0\end{cases}$ 解得$\begin{cases}b=12\\k=3\end{cases}$

$\therefore y=3x+12$

令$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$代入

$\rho\sin\theta=3\rho\cos\theta+12$

化简为$\rho(\sin\theta-3\cos\theta)=12$

[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

23．设$a,b,c\in R$，$a+b+c=0$，$abc=1$

（1）证明：$ab+bc+ca<0$；

（2）用$max\{a,b,c\}$表示a，b，c的最大值，证明：$max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$.

【解析】（1）证明：由$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$c^2+a^2\geqslant 2ca$，

可得$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$(当且仅当$a=b=c$可取等号)

$\therefore(a+b+c)^2\geqslant 3ab+3bc+3ca$

$ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2$

$\because a+b+c=0$

又$\because abc=1$，则

a，b，c不能为 0，且a，b，c不能取等值

$\therefore ab+bc+ac<0$

（2）证明：$\because a+b+c=0$，$abc=1$

$\therefore a$，b，c三数中必有正数，则可设$c>0$

$\because a+b+c=0$，则 $a+b=-c$， $abc=1$ 则 $ab=\dfrac{1}{c}$

$\therefore$ 由韦达定理可得，a，b 为 $x^2+cx+\dfrac{1}{c}=0$ 的两个解

$\Delta=c^2-4\dfrac{1}{c}\geqslant 0$

$c^3\geqslant 4$

$c\geqslant\sqrt[3]{4}$

$\therefore$ 当 c 为正时，a，b 为负，此时 c 为最大值即 $max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$.