2020 年高考全国丙卷数学（理）试卷

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y\in N^{*},y\geq x\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y=8\}$，则集合 $A\cap B$ 中元素的个数为（ ）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

2. 复数 $\frac{1}{1-3i}$ 的虚部是（ ）

A. $-\frac{3}{10}$　　B. $-\frac{1}{10}$　　C. $\frac{1}{10}$　　D. $\frac{3}{10}$

3. 在一组样本数据中，1，2，3，4 出现的频率分别为 p_1，p_2，p_3，p_4，且 $\sum_{i=1}^{4}p_i=1$，则下面四种情形中，对应样本的标准差最大的一组是（ ）

A. $p_1=p_4=0.1$，$p_2=p_3=0.4$

B. $p_1=p_4=0.4$，$p_2=p_3=0.1$

C. $p_1=p_4=0.2$，$p_2=p_3=0.3$

D. $p_1=p_4=0.3$，$p_2=p_3=0.2$

4. *Logistic* 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域，有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$（t 的单位：天）的 *Logistic* 模型：$I(t)=\frac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}$，其中 K 为最大确诊病例数，当 $I(t^{*})=0.95K$ 时，标志着已初步遏制疫情，则 t^{*} 约为（$\ln19\approx3$）（ ）

A. 60　　B. 63　　C. 66　　D. 69

5. 设 O 为坐标原点，直线 $x=2$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 D，E 两点，若 $OD\perp OE$，则 C 的焦点坐标为（ ）

A. $(\frac{1}{4},0)$　　B. $(\frac{1}{2},0)$　　C. $(1,0)$　　D. $(2,0)$

6. 已知向量a，b满足$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=6$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$，则$\cos\langle\vec{a},\vec{a}+\vec{b}\rangle$（ ）

A. $-\dfrac{31}{35}$　　B. $-\dfrac{19}{35}$　　C. $\dfrac{17}{35}$　　D. $\dfrac{19}{35}$

7. 在$\triangle ABC$中，$\cos C=\dfrac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则$\cos B=$（ ）

A. $\dfrac{1}{9}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

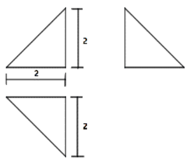
8. 右图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是（ ）

A. $6+4\sqrt{2}$

B. $4+4\sqrt{2}$

C. $6+2\sqrt{3}$

D. $4+2\sqrt{3}$



9. 已知$2\tan\theta-\tan(\theta+\dfrac{\pi}{4})=7$，则$\tan\theta=$（ ）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

10. 若直线l与曲线$y=\sqrt{x}$和圆$x^2+y^2=\dfrac{1}{5}$都相切，则l的方程为（ ）

A. $y=2x+1$　　B. $y=2x+\dfrac{1}{2}$

C. $y=\dfrac{1}{2}x+1$　　D. $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

11. 设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，离心率为$\sqrt{5}$，$P$是$C$上一点，且$F_1P\perp F_2P$. 若$\triangle PF_1F$的面积为4，则$a=$（ ）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

12. 已知$5^5<8^4$，$13^4<8^5$，设$a=\log_5 3$，$b=\log_8 5$，$c=\log_{13} 8$，则（ ）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geq 0, \\ 2x-y\geq 0, \\ x\leq 1, \end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为________.

14. $(x^2+\dfrac{2}{x})^6$ 的展开式中常数项是_______（用数字作答）.

15. 已知圆锥的底面半径为 1，母线长为 3，则该圆锥内半径最大的球的体积为_______.

16. 关于函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题：

① $f(x)$的图像关于y轴对称.

② $f(x)$的图像关于原点对称.

③ $f(x)$的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

④ $f(x)$的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是_______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. （12 分）

设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$.

（1）计算 a_2，a_3，猜想$\{a_n\}$的通项公式并加以证明.

（2）求数列$\{2^n a_n\}$的前 n 项和 S_n.

18. （12 分）

某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表（单位:天）：

锻炼人次 / 空气质量等级	[0,200]	(200,400]	(400,600]
1（优）	2	16	25
2（良）	5	10	12
3（轻度污染）	6	7	8
4（中度污染）	7	2	0

（1）分别估计该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率；

（2）求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值（同组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

（3）若某天的空气质量等级为 1 或 2，则称这天“空气质量好”；若某天的空气质量等级为 3 或 4，则称这天“空气质量不好”. 根据所给数据，完成下面的2×2列联表，并根据列联表，判断是否有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关？

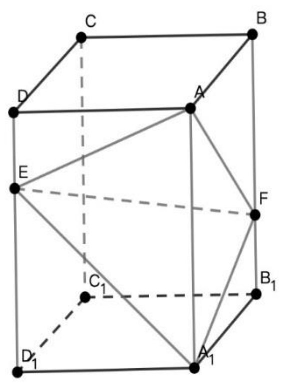
	人次≤400	人次＞400
空气质量好		
空气质量不好		

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19.（12 分）

如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E、F分别在棱DD_1，BB_1上，且$2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$.



（1）证明：点C_1在平面AEF内；

（2）若$AB=2$，$AD=1$，$AA_1=3$，求二面角$A-EF-A_1$的正弦值.

20.（12 分）

已知椭圆 C： $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$， A,B 分别为 C 的左、右顶点。

（1） 求 C 的方程;

（2） 若点 P 在 C 上，点 Q 在直线 $x=6$ 上，且 $|BP|=|BQ|$， $BP\perp BQ$，求 $\triangle APQ$ 的面积

21.（12 分）

设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$ 处的切线与 y 轴垂直。

（1）求 b；

（2）若 $f(x)$ 一个绝对值不大于 1 的零点，证明：$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. ［选修 4-4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2-t-t^2 \\ y=2-3t+t^2 \end{cases}$（$t$为参数且$t\neq 1$），$C$ 与坐标轴交于 A，B 两点.

(1) 求 $|AB|$；

(2) 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线 AB 的极坐标方程.

23. ［选修 4-5：不等式选讲］（10 分）

设 a， b， $c\in R$， $a+b+c=0$， $abc=1$

（1）证明： $ab+bc+ca<0$；

（2）用 $max\{a,\ b,\ c\}$ 表示 a， b， c 的最大值，证明： $max\{a,\ b,\ c\}\geq\sqrt[3]{4}$.

2020年高考全国丙卷数学（理）试卷答案

2020．07

一、选择题（本题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	B	C	B	D	A	C	D	D	A	A

二、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 7

14. 240

15. $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}$

16. ②③

三、解答题（共70分）

（一）必考题（共60分）

17. （1）$a_1=5$，$a_3=7$，$a_n=2n+1$

（2）$s_n=2+(2n-1)2^{n+1}$

18.（1）

$P(A)=0.43$

$P(B)=0.27$

$P(C)=0.21$

$P(D)=0.09$

（2）一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值为350人次。

（3）

	人次≤400	人次＞400	合计
空气质量好	33	37	70
气质量不好	22	8	30
合计	55	45	100

有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关.

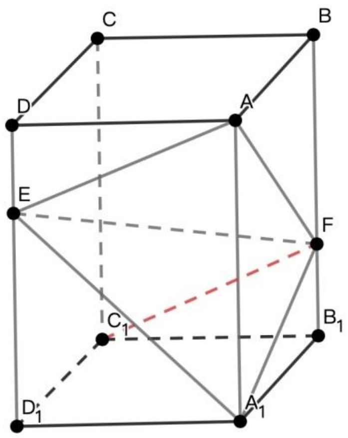
19.（1）证明：

连接 C_1F，由题意可得：

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中

$2DE=ED_1$， $BF=2FB_1$，

$\therefore E$，F 分别为 DD_1 和 BB_1 的三等分点



在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle C_1B_1F$ 中

$$\begin{cases} AD \mathrel{\underline{\underline{//}}} C_1B_1 \\ DE \mathrel{\underline{\underline{//}}} B_1F \\ \angle ADE=\angle C_1B_1F \end{cases}$$

$\therefore AE \mathrel{\underline{\underline{//}}} C_1F$

$\therefore A$、E、C_1、F 四点共面

$\therefore$ 点 C_1 在平面 AEF 内

（2）二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$

20.（1）C：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{16y^2}{25}=1$

（2）$S_{\triangle APQ}=\dfrac{5}{2}$

（二）选考题：（共 10 分）

21. （1）$b=-\frac{3}{4}$

（2）$f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}$

令 $f'(x)=0$

$\therefore x=\pm\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,-\frac{1}{2})$ 单调递增，在 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 单调递减，在 $(\frac{1}{2},1)$ 单调递增

又 $\because f(-\frac{1}{2})=f(1)=c+\frac{1}{4}$，$f(\frac{1}{2})=f(-1)=c-\frac{1}{4}$

即 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 的值域为 $\left[c-\frac{1}{4},c+\frac{1}{4}\right]$

$\because$ 存在零点

$\therefore c-\frac{1}{4}\le 0$，$c+\frac{1}{4}\ge 0$

即 $-\frac{1}{4}\le c\le\frac{1}{4}$

$\because f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 单调递增

当 $x<-1$ 时，$f(x)<f(-1)=c-\frac{1}{4}$

$\because -\frac{1}{4}\le c\le\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)$ 必小于 0

同理，当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=c+\frac{1}{4}$

$\because -\frac{1}{4}\le c\le\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)$ 必大于 0

即 $(-\infty,-1)$ 与 $(1,+\infty)$ 无零点

即 $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于1

22.（1） $4\sqrt{10}$

（2） $\rho(\sin\theta-3\cos\theta)=12$

23. （1）证明：由 $a^2+b^2\geq 2ab$， $b^2+c^2\geq 2bc$， $c^2+a^2\geq 2ca$，

可得 $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$ (当且仅当 $a=b=c$ 可取等号)

$\therefore (a+b+c)^2\geq 3ab+3bc+3ca$

$ab+bc+ca\leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$

$\because a+b+c=0$

又 $\because abc=1$ 则 a， b， c 不能为 0，且 a， b， c 不能取等值

$\therefore ab+bc+ac<0$

（2）证明：$\because a+b+c=0$， $abc=1$

$\therefore a$， b， c 三数中必有正数，则可设 $c>0$

$\because a+b+c=0$，则 $a+b=-c$， $abc=1$，则 $ab=\frac{1}{c}$

$\therefore$ 由韦达定理可得， a， b 为 $x^2+cx+\frac{1}{c}=0$ 的两个解

$\Delta=c^2-4\frac{1}{c}\geq 0$

$c^3\geq 4$

$c^3\geq\sqrt[3]{4}$

$\therefore$ 当 c 为正时， a， b 为负，此时 c 为最大值即 $max\{a, b, c\}\geq\sqrt[3]{4}$