# 2020年高考全国丙卷数学（理）逐题解析

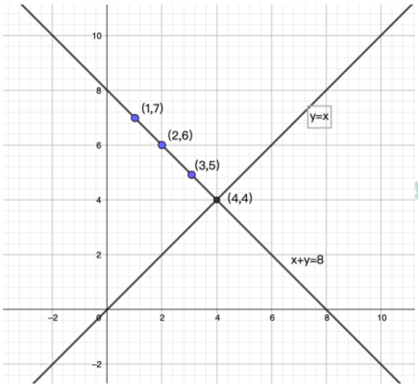
**一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y\in N^*,y\geq x\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y=8\}$，则集合 $A\cap B$ 中元素的个数为（ ）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

【答案】C

【解析】




由图知 $A\cap B=\{(1,7),(2,6),(3,5),(4,4)\}$，

故选C

2. 复数 $\frac{1}{1-3i}$ 的虚部是（ ）

A. $-\frac{3}{10}$　　B. $-\frac{1}{10}$　　C. $\frac{1}{10}$　　D. $\frac{3}{10}$

【答案】D

【解析】

$$\frac{1}{1-3i}=\frac{(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{1+3i}{1-9i^2}=\frac{1+3i}{10}=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$$

故选D

3. 在一组样本数据中，1，2，3，4出现的频率分别为 $p_1$，$p_2$，$p_3$，$p_4$，且 $\sum_{i=1}^{4}p_i=1$，

则下面四种情形中，对应样本的标准差最大的一组是（ ）

A. $p_1 = p_4 = 0.1$， $p_2 = p_3 = 0.4$

B. $p_1 = p_4 = 0.4$， $p_2 = p_3 = 0.1$

C. $p_1 = p_4 = 0.2$， $p_2 = p_3 = 0.3$

D. $p_1 = p_4 = 0.3$， $p_2 = p_3 = 0.2$

【答案】B

【解析】

A：设样本总数 $N = 10$， 则这组样本为$1,2,2,2,2,3,3,3,3,4$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N} = 2.5$$

$$S_A = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}}{N} = \sqrt{\frac{(1-2.5)^2 + 4\times(2-2.5)^2 + 4\times(3-2.5)^2 + (4-2.5)^2}{10}} = \sqrt{0.65}$$

B：设样本总数 $N = 10$， 则这组样本为$1,1,1,1,2,3,4,4,4,4$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N} = 2.5$$

$$S_A = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}}{N} = \sqrt{\frac{(1-2.5)^2\times 4 + (2-2.5)^2 + (3-2.5)^2 + (4-2.5)^2\times 4}{10}} = \sqrt{1.85}$$

C：设样本总数 $N = 10$ ,则这组样本为$1,1,2,2,2,3,3,3,4,4$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N} = 2.5$$

$$S_A = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}}{N} = \sqrt{\frac{(1-2.5)^2\times 2 + (2-2.5)^2\times 3 + (3-2.5)^2\times 3 + (4-2.5)^2\times 2}{10}} = \sqrt{1.05}$$

D：设样本总数 $N = 10$ ,则这组样本为$1,1,1,2,2,3,3,4,4,4$

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{N}=2.5$$

$$S_A=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{N}}=\sqrt{\frac{(1-2.5)^2\times3+(2-2.5)^2\times2+(3-2.5)^2\times2+(4-2.5)^2\times3}{10}}=\sqrt{1.45}$$

故 $S_A<S_C<S_D<S_B$

故选 B

4. $Logistic$ 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域，有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$（$t$ 的单位：天）的 $Logistic$ 模型：$I(t)=\frac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}$，其中 $K$ 为最大确诊病例数，当 $I(t^*)=0.95K$ 时，标志着已初步遏制疫情，则 $t^*$ 约为（$\ln19\approx3$）（ ）

A. 60　　B. 63　　C. 66　　D. 69

【答案】C

【解析】

$$I(t^*)=\frac{K}{1+e^{-0.23(t^*-53)}}=0.95K$$

$$1=0.95+0.95e^{-0.23(t^*-53)}$$

$$0.05=0.95e^{-0.23(t^*-53)}$$

$$e^{0.23(t^*-53)}=\frac{0.95}{0.05}=19$$

$$\ln e^{0.23(t^*-53)}=\ln19$$

$$0.23(t^*-53)\approx3$$

故 $t^*=\frac{3}{0.23}+53\approx66$

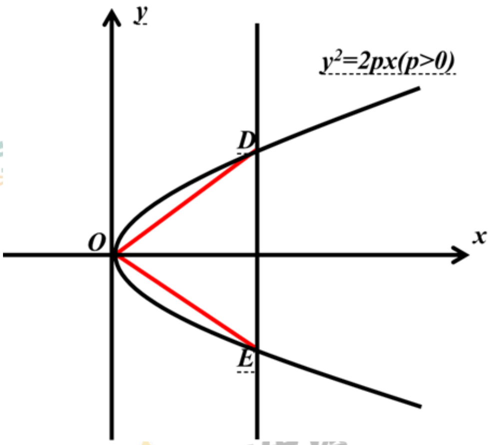
故选 C

5. 设 $O$ 为坐标原点，直线 $x=2$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 $D$，$E$ 两点，若 $OD\perp OE$，则 $C$ 的焦点坐标为（ ）

A. $(\frac{1}{4},0)$　　B. $(\frac{1}{2},0)$　　C. $(1,0)$　　D. $(2,0)$

【答案】 B

【解析】




$y^2=2px$

把 $x=2$ 代入

$y=\pm 2\sqrt{p}$

$D(2,2\sqrt{p})$

$E(2,-2\sqrt{p})$

$\because OD\perp OE$

$\therefore \overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}=0$

$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}=2\times 2+(2\sqrt{p})\times(-2\sqrt{p})$

$=4-4p$

$\therefore p=1$

$\therefore C(\frac{p}{2},0)$，即 $C(\frac{1}{2},0)$

故选 B

6. 已知向量 $a$， $b$ 满足 $|\vec{a}|=5$， $|\vec{b}|=6$， $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$，则 $\cos\langle\vec{a},\ \vec{a}+\vec{b}\rangle$ （ ）

A. $-\frac{31}{35}$　　B. $-\frac{19}{35}$　　C. $\frac{17}{35}$　　D. $\frac{19}{35}$

【答案】 D

【解析】

$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=-6$， $|\vec{a}|=5$， $|\vec{b}|=6$

又 $\because (\vec{a}+\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=49$

$\therefore \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=7$

$\therefore \cos\left\langle \vec{a}, \vec{a}+\vec{b}\right\rangle = \dfrac{\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}+\vec{b}\right|} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}}{5\times 7} = \dfrac{25-6}{35} = \dfrac{19}{35}$

故选 D

7. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\dfrac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则 $\cos B=$（ ）

A. $\dfrac{1}{9}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

【答案】 A

【解析】

由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2\times\cos C\cdot AC\cdot BC=16+9-2\times\dfrac{2}{3}\times 4\times 3=9$

$\therefore AB=3$

$\therefore \cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{9+9-16}{2\times 3\times 3}=\dfrac{1}{9}$

故选 A

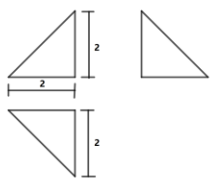
8. 右图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是（ ）

A. $6+4\sqrt{2}$

B. $4+4\sqrt{2}$

C. $6+2\sqrt{3}$

D. $4+2\sqrt{3}$




【答案】 C

【解析】

由图可知，该立体图像的四个表面图像是由三个直角边为 2 的等腰直角三角形和一个边长为 $2\sqrt{2}$ 的等边三角形组成

$\therefore S=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 3+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times \frac{\sqrt{3}}{2}=6+2\sqrt{3}$

故选 C

9. 已知 $2\tan\theta-\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=7$，则 $\tan\theta=$（ ）

A. $-2$　　B. $-1$　　C. $1$　　D. $2$

【答案】 D

【解析】

$\because \tan(\theta+\frac{\pi}{4})=\dfrac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$\therefore 2\tan\theta-\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=7$

$\Rightarrow \dfrac{2\tan\theta-2\tan^2\theta-1-\tan\theta}{1-\tan\theta}=7$

$\Rightarrow -2\tan^2\theta+\tan\theta-1=7-7\tan\theta$

$\Rightarrow 2\tan^2\theta-8\tan\theta+8=0$

$\Rightarrow \tan^2\theta-4\tan\theta+4=0$

$\Rightarrow (\tan\theta-2)^2=0$

$\therefore \tan\theta=2$

故选 D

10. 若直线 $l$ 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 和圆 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 都相切，则 $l$ 的方程为（ ）

A. $y=2x+1$　　B. $y=2x+\frac{1}{2}$

C. $y=\frac{1}{2}x+1$　　D. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

$y=\sqrt{x}$在$x_0$处的导数为$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$

$\therefore$在$(x_0,\sqrt{x_0})$处的切线为$y=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\sqrt{x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\dfrac{1}{2}\sqrt{x_0}$

即 $x-2\sqrt{x_0}y+x_0=0$

若该切线也与圆 $x^2+y^2=\dfrac{1}{5}$ 相切.

则圆心到该切线的距离等于半径.

$\therefore \dfrac{|x_0|}{\sqrt{1+4x_0}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\dfrac{x_0^2}{1+4x_0}=\dfrac{1}{5}$

$x_0=1$或$x_0=-\dfrac{1}{5}$

由于$(x_0,\sqrt{x_0})$在$y=\sqrt{x}$上，故 $x_0\geq 0$

$\therefore x_0=1$

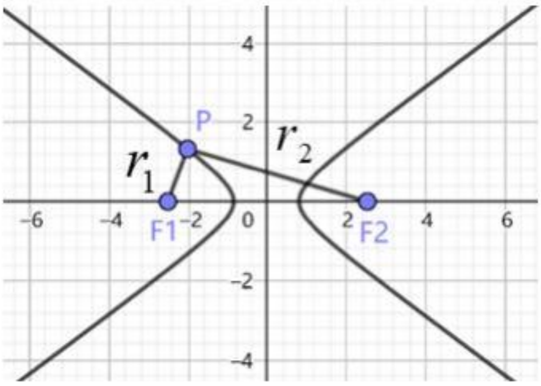
切线方程为$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

故选 D

11. 设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，离心率为$\sqrt{5}$，$P$是$C$上一点，且$F_1P\perp F_2P$. 若$\triangle PF_1F$的面积为 4，则$a=$（ ）

A. 1　　　B. 2　　　C. 4　　　D. 8

【答案】A




【解析】

设$PF_1=r_1$，$PF_2=r_2$，$F_1F_2=2c$

$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2}r_1r_2=4 \\ r_1^2+r_2^2=4c^2 \\ r_1-r_2=2a \end{cases}$，且 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，

$\therefore (r_1-r_2)^2+2r_1r_2=4c^2$

$4a^2+8\times2=4\left(\sqrt{5}a\right)^2$

即 $a=1$

故选 A

12. 已知 $5^5<8^4$，$13^4<8^5$，设 $a=\log_5 3$，$b=\log_8 5$，$c=\log_{13} 8$，则（ ）

A. $a<b<c$  B. $b<a<c$  C. $b<c<a$  D. $c<a<b$

【答案】 A

【解析】

$\because 5^5<8^4$

$\therefore 5\ln5<4\ln8$

$\therefore b=\frac{\ln5}{\ln8}<\frac{4}{5}$

$\because 13^4<8^5$

$\therefore 4\ln13<5\ln8$

$\therefore c=\frac{\ln8}{\ln13}>\frac{4}{5}$

$\therefore c>b$

$\because 3^4<5^3$

$\therefore 4\ln3<3\ln5$

$\therefore a=\frac{\ln3}{\ln5}<\frac{3}{4}$

$\because 5^4>8^3$

$\therefore 4\ln5>3\ln8$

$\therefore b=\frac{\ln5}{\ln8}>\frac{3}{4}$

$\therefore b > a$

$\therefore a < b < c$

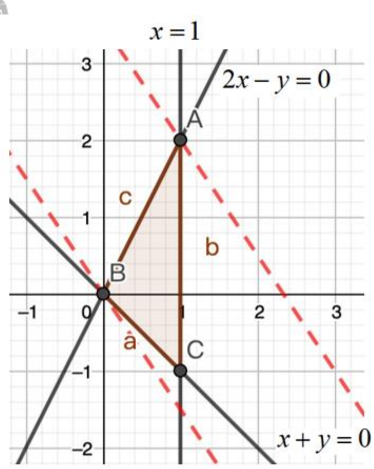
故选 A

## 二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 $x$，$y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geq 0, \\ 2x-y\geq 0, \\ x\leq 1, \end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为________.

【答案】7

【解析】将 $x$，$y$ 的约束条件画入平面直角坐标系得：




由图可知，当在点 $(1,2)$ 时，$z=3x+2y$ 取最大值，此时 $z=3\times1+2\times2=7$

14. $(x^2+\frac{2}{x})^6$ 的展开式中常数项是_______（用数字作答）.

【答案】240

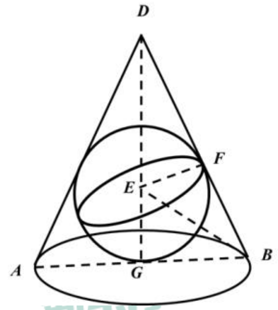
【解析】由题可得：原式= $\sum_{i=1}^{6} C_6^i (x^2)^{6-i}(\frac{2}{x})^i$，

根据题意：当某一项为常数时，即 $C_6^i (x^2)^{6-i}(\frac{2}{x})^i$（$i\leq 6$）为常数，

此时 $2\times(6-i)=i$，解得 $i=4$

$\therefore$ 常数项为 $C_6^4 (x^2)^{6-4}(\frac{2}{x})^4=240$

15. 已知圆锥的底面半径为 1，母线长为 3，则该圆锥内半径最大的球的体积为_______.




【答案】$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}$

【解析】做圆锥的轴切面

轴切面为一等腰三角形，腰长为圆锥母线长度，底为圆锥底面直径

故圆锥内切球半径等于轴切面内切圆半径

故三角形内切圆的半径为

$r=\dfrac{2S}{a+b+c}$其中S为三角形面积，$a$，$b$，$c$分别为三角形三边长

所以轴切面三角形高为$\sqrt{9^2-1^2}=2\sqrt{2}$，底为 2

所以$S_{轴}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2=2\sqrt{2}$

所以$r=\dfrac{2\times 2\sqrt{2}}{3+3+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即内切球半径为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

所以$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$

16. 关于函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$有如下四个命题：

① $f(x)$的图像关于y轴对称.

② $f(x)$的图像关于原点对称.

③ $f(x)$的图像关于直线$x=\dfrac{\pi}{2}$对称.

④ $f(x)$的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是_______.

【答案】②③

【解析】 $f(-x)=\sin(-x)+\dfrac{1}{\sin(-x)}=-\sin x-\dfrac{1}{\sin x}=-\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)=-f(x)$

故$f(x)$的图像关于原点对称

故①错误，②正确

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\cos x+\frac{1}{\cos x}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\cos x+\frac{1}{\cos x}$$

故 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$，即 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$，③正确

当 $x$ 趋近于 0，且 $x>0$ 时，即 $x\to 0^+$， $f(x)$ 趋向于无穷大

又 $\because f(x)$ 图像关于原点对称

$\therefore$ 当 $x\to 0^-$ 时，$f(x)$ 值趋近于无穷小，④错误

$\therefore$ 正确命题序号为②③

**三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。**

**（一）必考题：共 60 分。**

17.（12 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$， $a_{n+1}=3a_n-4n$.

（1）计算 $a_2$, $a_3$，猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明.

（2）求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$.

【答案】 （1） $a_1=5$， $a_3=7$， $a_n=2n+1$

（2） $s_n=2+(2n-1)2^{n+1}$

【解析】

（1）由 $a_1=3$， $a_{n+1}=3a_n-4n$， $a_2=3a_1-4=5$， $a_3=3a_2-4\times2=7$， $\cdots$

猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+1$.

证明如下：（数学归纳法）当 $n=1,2$ 时，显然成立；（1）

假设 $n=k$ 时，即 $a_k=2k+1$ 成立，其中 $(k\in N^*)$，

由 $a_{k+1}=3a_k-4k=3(2k+1)-4k=2(k+1)+1$ （2）

故假设成立，综上（1）（2），所以 $a_n=2n+1(n\in N^*)$

（2）令 $b^n=2^n$，$a_n=(2n+1)2^n$

$\therefore S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n$

即 $S_n=3\times2+5\times2^2+7\times2^3+\cdots+(2n-1)\times2^{n-1}+(2n+1)\times2^n$ ①

则 $2S_n=3\times2^2+5\times2^3+7\times2^4+\cdots+(2n-1)\times2^n+(2n+1)\times2^{n+1}$ ②

①-②得 $-S_n=6+2(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(2n+1)\times2^{n+1}$

$$=6+2\left(\frac{2^2-2^n\times2}{1-2}\right)-(2n+1)\times2^{n+1}$$

$$=-2+(-2n+1)\times2^{n+1}$$

$\therefore S_n=2+(2n-1)2^{n+1}$

18. （12 分）

某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表（单位:天）：

| 锻炼人次 / 空气质量等级 | [0,200] | (200,400] | (400,600] |
|---|---|---|---|
| 1（优） | 2 | 16 | 25 |
| 2（良） | 5 | 10 | 12 |
| 3（轻度污染） | 6 | 7 | 8 |
| 4（中度污染） | 7 | 2 | 0 |

（1）分别估计该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率；

（2）求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值（同组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

（3）若某天的空气质量等级为 1 或 2，则称这天“空气质量好”；若某天的空气质量等级为 3 或 4，则称这天“空气质量不好”. 根据所给数据，完成下面的 $2\times2$ 列联表，并根据列联表，判断是否有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当

天的空气质量有关?

| | 人次≤400 | 人次>400 |
|---|---|---|
| 空气质量好 | | |
| 空气质量不好 | | |

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

| $P(K^2\geqslant k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $k$ | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

【答案】（1）

$P(A)=0.43$
$P(B)=0.27$
$P(C)=0.21$
$P(D)=0.09$

（2）一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值为 350 人次。

（3）

| | 人次≤400 | 人次>400 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 空气质量好 | 33 | 37 | 70 |
| 气质量不好 | 22 | 8 | 30 |
| 合计 | 55 | 45 | 100 |

有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关.

【解析】

（1）记“该市空气质量等级为 1，2，3，4”分别为事件 $A$，$B$，$C$，$D$

则

$$P(A)=\frac{2+16+25}{100}=0.43$$

$$P(B)=\frac{5+10+12}{100}=0.27$$

$$P(C)=\frac{6+7+8}{100}=0.21$$

$$P(D)=\frac{7+2+0}{100}=0.09$$

（2）记“一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值”为 $\bar{x}$

$$\bar{x}=\frac{2+5+6+7}{100}\times100+\frac{16+10+7+2}{100}\times300+\frac{25+12+8+10}{100}\times500$$

$=20+105+225$

$=350$

∴一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值为 350 人次。

（3）

| | 人次≤400 | 人次>400 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 空气质量好 | 33 | 37 | 70 |
| 气质量不好 | 22 | 8 | 30 |
| 合计 | 55 | 45 | 100 |

$$K^2=\frac{100(33\times8-37\times22)^2}{(33+37)(22+8)(33+22)(37+8)}\approx5.82$$

$\therefore P(K^2>3.841)=0.05$

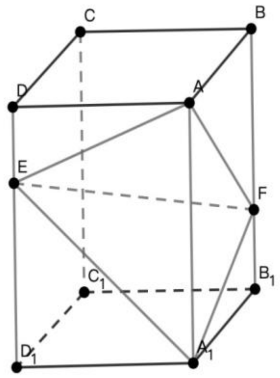
∴有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关。

19．（12 分）

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $E$、$F$ 分别在棱 $DD_1$，$BB_1$ 上，且 $2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$.

（1）证明：点 $C_1$ 在平面 $AEF$ 内；

（2）若 $AB=2$，$AD=1$，$AA_1=3$，求二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值.



【答案】

（1）略

（2）二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$

【解析】

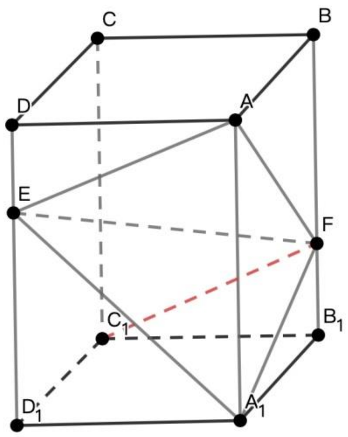
（1）证明：

连接 $C_1F$，由题意可得：

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中

$2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$，

$\therefore E$，$F$ 分别为 $DD_1$ 和 $BB_1$ 的三等分点




在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle C_1B_1F$ 中

$$\begin{cases} AD \underline{\underline{//}} C_1B_1 \\ DE \underline{\underline{//}} B_1F \\ \angle ADE = \angle C_1B_1F \end{cases}$$

$\therefore AE \underline{\underline{//}} C_1F$

$\therefore A$、$E$、$C_1$、$F$ 四点共面

$\therefore$ 点 $C_1$ 在平面 $AEF$ 内

（2）证明：

以 $C_1$ 为原点，$\overrightarrow{C_1D_1}$ 为 $x$ 轴，$\overrightarrow{C_1B_1}$ 为 $y$ 轴，$\overrightarrow{C_1C}$ 为 $z$ 轴，建立空间直角坐标系 $C_1-xyz$

$A(2,1,3)$，$E(2,0,2)$，$F(0,1,1)$，$A_1(2,1,0)$

$\overrightarrow{EF}=(-2,1,-1)$

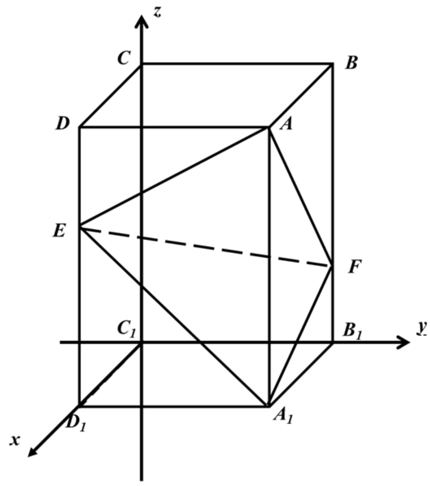
$\overrightarrow{EA}=(0,1,1)$

$\overrightarrow{EA_1}=(0,1,-2)$

$\therefore$ 平面 $AEF$ 的法向量 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$

$$\begin{cases}-2x_1+y_1-z_1=0\\y_1+z_1=0,\end{cases}$$

设 $y_1=1$，$\vec{m}=(1,1,-1)$




同理：

平面 $EFA_1$ 法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$

$$\begin{cases}-2x_2+y_2-z_2=0\\y_2-2z_2=0\end{cases}$$

设 $y_2=1$，$\vec{n}=(\frac{1}{2},2,1)$

$$|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\left|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}\right|=\frac{\left|\frac{1}{2}+2-1\right|}{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{2}}=\frac{\left|\frac{3}{2}\right|}{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

$\therefore |\sin\partial|=\frac{\sqrt{42}}{7}$

$\therefore$ 二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$

20. （12 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$，$A,B$ 分别为 $C$ 的左、右顶点。

（1）求 $C$ 的方程；

（2）若点 $P$ 在 $C$ 上，点 $Q$ 在直线 $x=6$ 上，且 $|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求 $\triangle APQ$ 的面积

【答案】（1）$C$：$\frac{x^2}{25}+\frac{16y^2}{25}=1$

（2）$S_{\triangle APQ}=\frac{5}{2}$

【解析】（1）由题意可得：$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{25-m^2}{25}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$m^2=\frac{25}{16}$，$m=\frac{5}{4}$

$\therefore C$ 的方程为：$\frac{x^2}{25}+\frac{16y^2}{25}=1$

（2）令点 $P$ 的坐标为 $(x_1,y_1)$

点 $Q$ 的坐标为 $(6,y_0)$，已知点 $B$ 坐标为 $(5,0)$

$\because |BP|=|BQ|$

$\therefore \sqrt{(x_1-5)^2+y_1^{\,2}}=\sqrt{(6-5)^2+y_0^{\,2}}$　　①

又 $\because BP\perp BQ$

$\therefore \dfrac{y_1}{x_1-5}\cdot\dfrac{y_0}{6-5}=-1$

$\therefore y_0=\dfrac{5-x_1}{y_1}$　代入①式得：

$(x_1-5)^2+y_1^{\,2}=\dfrac{(x_1-5)^2+y_1^{\,2}}{y_1^{\,2}}$

$\therefore y_1=\pm1$

代入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{16y^2}{25}=1$，可得 $x=\pm3$

（i）当 $x_1=3$，$y_1=1$ 时，$y_0=2$

$P(3,1)$，$Q(6,2)$

直线 $AP$ 的方程为 $y=\dfrac{1}{8}(x+5)$，即 $8y-x-5=0$

点 $Q$ 到 $AP$ 的距离 $d$ 为：$d=\dfrac{|2\times8-6-5|}{\sqrt{8^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{65}}$

$AP$ 的长度为 $|AP|=\sqrt{1+(\frac{1}{8})^2}\cdot[3\text{-}(\text{-}5)]=\sqrt{65}$

$\therefore S_{\triangle APQ}=\dfrac{1}{2}\cdot|AP|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{65}\times\dfrac{5}{\sqrt{65}}=\dfrac{5}{2}$

同理，当 $x_1=3,y_1=-1$，$y_0=-2$ 时，$S_{\triangle APQ}=\dfrac{5}{2}$

（ii）当 $x_1=-3$，$y_1=1$ 时，$y_0=8$

$P(-3,1)$，$Q(6,8)$

直线 $AP$ 的方程为：$2y-x-5=0$

点 $Q$ 到 $AP$ 的距离 $d$ 为：$d=\dfrac{|2\times8-6-5|}{\sqrt{2^2+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}$

$AP$ 的长度为：$|AP|=\sqrt{1+(\dfrac{1}{2})^2}\left[-3-(-5)\right]=\sqrt{5}$

$\therefore S_{\triangle APQ}=\dfrac{1}{2}\cdot|AP|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{5}{2}$

同理，$x_1=-3$，$y_1=-1$，$y_0=-8$时

$S_{\triangle APQ}=\dfrac{5}{2}$

综上所述，$S_{\triangle APQ}=\dfrac{5}{2}$

21. （12 分）

设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\dfrac{1}{2},f(\dfrac{1}{2}))$ 处的切线与 $y$ 轴垂直.

（1）求 $b$；

（2）若 $f(x)$ 一个绝对值不大于 1 的零点，证明：$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

【答案】（1）$b=-\dfrac{3}{4}$

（2）略

【解析】

（1）$f'(x)=3x^2+b$

$f'(\dfrac{1}{2})=0$

$\therefore f'(\dfrac{1}{2})=3\times(\dfrac{1}{2})^2+b=0$

$b=-\dfrac{3}{4}$

（2）$f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{4}$

令 $f'(x)=0$

$\therefore x=\pm\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,-\frac{1}{2})$ 单调递增，在 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 单调递减，在 $(\frac{1}{2},1)$ 单调递增

又 $\because f(-\frac{1}{2})=f(1)=c+\frac{1}{4}$， $f(\frac{1}{2})=f(-1)=c-\frac{1}{4}$

即 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 的值域为 $\left[c-\frac{1}{4},c+\frac{1}{4}\right]$

$\because$ 存在零点

$\therefore c-\frac{1}{4}\le 0$， $c+\frac{1}{4}\ge 0$

即 $-\frac{1}{4}\le c\le\frac{1}{4}$

$\because f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 单调递增

当 $x<-1$ 时， $f(x)<f(-1)=c-\frac{1}{4}$

$\because -\frac{1}{4}\le c\le\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)$ 必小于 0

同理，当 $x>1$ 时， $f(x)>f(1)=c+\frac{1}{4}$

$\because -\frac{1}{4}\le c\le\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)$ 必大于 0

即 $(-\infty,-1)$ 与 $(1,+\infty)$ 无零点

即 $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1

**（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所**

**做的第一题计分。**

22. ［选修 4-4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 $xOy$ 中，曲线 $C$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=2-t-t^2 \\ y=2-3t+t^2 \end{cases}$（$t$为参数且$t\neq1$），$C$ 与坐标轴交于 $A$，$B$ 两点.

(1) 求$|AB|$；

(2) 以坐标原点为极点，$x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线 $AB$ 的极坐标方程.

【答案】（1） $4\sqrt{10}$

（2） $\rho(\sin\theta-3\cos\theta)=12$

【解析】

（1）由题设得：令 $x=0$，即 $2-t-t^2=0$， $t_1=1$（舍）或 $t_2=-2$

当 $t=-2$ 时， $y=12$

令 $y=0$，即 $2-3t+t^2=0$， $t_1=1$（舍）或 $t_2=2$

当 $t=2$ 时， $x=-4$

$\therefore (0,12)$， $(-4,0)$ 为 $C$ 与坐标轴交于 $A$，$B$ 两点坐标

$|AB|=\sqrt{[0-(-4)]^2+(12-0)^2}=4\sqrt{10}$

（2）由（1）可知，设 $l_{AB}$： $y=kx+b$

将 $A$， $B$ 点坐标代入

$\begin{cases} 12=b \\ -4k+b=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=12 \\ k=3 \end{cases}$

$\therefore y=3x+12$

令 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$ 代入

$\rho\sin\theta=3\rho\cos\theta+12$

化简为 $\rho(\sin\theta-3\cos\theta)=12$

23. ［选修 4-5：不等式选讲］（10 分）

设 $a$，$b$，$c \in R$，$a+b+c=0$，$abc=1$

（1）证明：$ab+bc+ca<0$；

（2）用 $max\{a, b, c\}$ 表示 $a$，$b$，$c$ 的最大值，证明：$max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}$.

【答案】（1）证明：由 $a^2+b^2 \geq 2ab$，$b^2+c^2 \geq 2bc$，$c^2+a^2 \geq 2ca$，

可得 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$（当且仅当 $a=b=c$ 可取等号）

$\therefore (a+b+c)^2 \geq 3ab+3bc+3ca$

$ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$

$\because a+b+c=0$

又 $\because abc=1$ 则 $a$，$b$，$c$ 不能为 0，且 $a$，$b$，$c$ 不能取等值

$\therefore ab+bc+ac<0$

（2）证明：$\because a+b+c=0$，$abc=1$

$\because a$，$b$，$c$ 三数中必有正数，则可设 $c>0$

$\therefore a+b+c=0$，则 $a+b=-c$，$abc=1$，则 $ab=\frac{1}{c}$

$\therefore$ 由韦达定理可得，$a$，$b$ 为 $x^2+cx+\frac{1}{c}=0$ 的两个解

$\Delta = c^2-4\frac{1}{c} \geq 0$

$c^3 \geq 4$

$c \geq \sqrt[3]{4}$

$\therefore$ 当 $c$ 为正时，$a$，$b$ 为负，此时 $c$ 为最大值即 $max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}$