2019 年北京市中考数学逐题解析

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1．4 月 24 日是中国航天日．1970 年的这一天，我国自行设计、制造的第一颗人造地球卫星“东方红一号”成功发射，标志着中国从此进入了太空时代．它的运行轨道，距地球最近点 439 000 米．将 439 000 用科学记数法表示应为

（A）0.439×10^6　　（B）4.39×10^6

（C）4.39×10^5　　（D）439×10^3

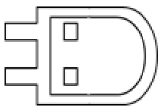
【答案】C

【解析】本题考查科学记数法，难度易.

2．下列倡导节约的图案中，是轴对称图形的是


（A）


（B）


（C）


（D）

【答案】C

【解析】本题考查轴对称图形的概念，难度易.

3．正十边形的外角和为

（A）180°　　（B）360°　　（C）720°　　（D）1440°

【答案】B

【解析】本题考查多边形外角和为360°，难度易.

4．在数轴上，点 A，B 在原点 O 的两侧，分别表示数 a，2，将点 A 向右平移 1 个单位长度，得到点 C．若 $CO=BO$，则 a 的值为

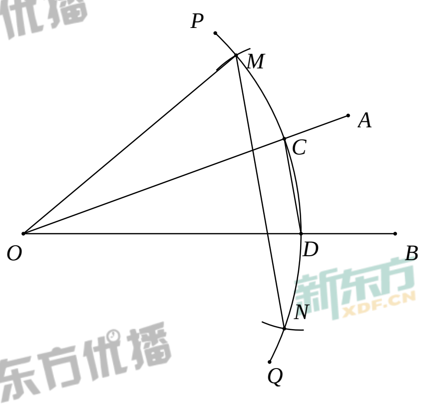
（A）-3　　（B）-2　　（C）-1　　（D）1

【答案】A

【解析】本题考查数轴上的点的平移及绝对值的几何意义。点A表示数为a，点B表示数为2，点C表示数为$a+1$. 由题意，$a<0$，$\because CO=BO$，$\therefore |a+1|=2$，解得$a=1$（舍）或$a=-3$，故选A，难度易.

5．已知锐角$\angle AOB$

如图，



（1）在射线OA上取一点C，以点O为圆心，OC长为半径作$\overset{\frown}{PQ}$，交射线OB于点D，连接CD;

（2）分别以点C，D为圆心，CD长为半径作弧，交$\overset{\frown}{PQ}$于点M，N;

（3）连接OM，MN.

根据以上作图过程及所作图形，下列结论中错误的是

（A）$\angle COM=\angle COD$　　（B）若$OM=MN$，则$\angle AOB=20°$

（C）$MN \parallel CD$　　（D）$MN=3CD$

【答案】D

【解析】连接ON,由作图可知$\triangle COM \cong \triangle COD \cong \triangle DON$.

A．由$\triangle COM \cong \triangle COD$，可得$\angle COM=\angle COD$，故A正确.

B. 若$OM=MN$，则$\triangle OMN$为等边三角形. 由全等可知$\angle COM=\angle COD=\angle DON=20°$，故B正确.

C．由题意，$OC=OD$，$\therefore \angle OCD=\dfrac{180°-\angle COD}{2}$．设$OC$与$OD$与$MN$分别交于$R$，$S$．易证$\triangle MOR \cong \triangle NOS$，则$OR=OS$，

$\therefore \angle ORS=\dfrac{180°-\angle COD}{2}$．$\therefore \angle OCD=\angle ORS$．$\therefore MN \parallel CD$，C正确.

D．由题意易证$MC=CD=DN$，$\therefore MC+CD+DN=3CD$．$\because$两点之间线段最短．$\therefore MN<MC+CD+DN=3CD$，故选D．难度中.

6．如果$m+n=1$，那么代数式$\left(\frac{2m+n}{m^2-mn}+\frac{1}{m}\right)\cdot\left(m^2-n^2\right)$的值为

（A）-3　　（B）-1　　（C）1　　（D）3

【答案】D

【解析】

$\left(\frac{2m+n}{m^2-mn}+\frac{1}{m}\right)\cdot\left(m^2-n^2\right)$

$=\left[\frac{2m+n}{m(m-n)}+\frac{m-n}{m(m-n)}\right]\cdot(m+n)(m-n)$

$=\frac{2m+m}{m(m-n)}\cdot(m+n)(m-n)$

$=3(m+n)$

$\because m+n=1$，$\therefore$ 原式$=3$，故选 D，难度易．

7．用三个不等式$a>b$，$ab>0$，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$中的两个不等式作为题设，余下的一个不等式作为结论组成一个命题，组成真命题的个数为

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【答案】D

【解析】本题共有 3 种命题：

命题①，如果 a＞b，ab＞0，那么$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$．

$\because a>b,\therefore a-b>0,\because ab>0,\therefore \frac{a-b}{ab}>0$，整理得$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，$\therefore$ 该命题为真命题．

命题②，如果 $a>b$，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，那么 $ab>0$．

$\because \frac{1}{a}<\frac{1}{b},\therefore \frac{1}{a}-\frac{1}{b}<0$，$\frac{b-a}{ab}<0$．$\because a>b$，$\therefore b-a<0$，$\therefore ab>0$．

$\therefore$ 该命题为真命题．

命题③，如果 $ab>0$，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，那么 $a>b$.

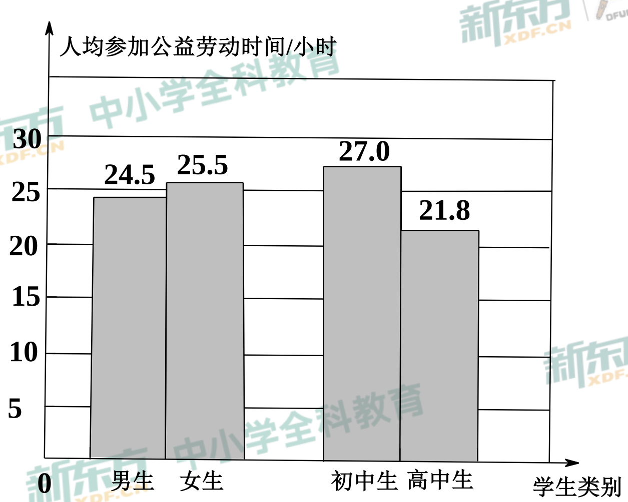
$\because \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，$\therefore \frac{1}{a}-\frac{1}{b}<0$，$\frac{b-a}{ab}<0$．$\because ab>0$，$\therefore b-a<0$，$\therefore b<a$．

$\therefore$ 该命题为真命题.

难度中.

8．某校共有 200 名学生，为了解本学期学生参加公益劳动的情况，收集了他们参加公益劳动时间（单位：小时）等数据，以下是根据数据绘制的统计图表的一部分.

人数 \ 时间 \ 学生类别		$0\leqslant t<10$	$10\leqslant t<20$	$20\leqslant t<30$	$30\leqslant t<40$	$t\geqslant 40$
性别	男	7	31	25	30	4
	女	8	29	26	32	8
学段	初中		25	36	44	11
	高中					



下面有四个推断：

①这 200 名学生参加公益劳动时间的平均数一定在 24.5-25.5 之间

②这 200 名学生参加公益劳动时间的中位数在 20-30 之间

③这 200 名学生中的初中生参加公益劳动时间的中位数一定在 20-30 之间

④这 200 名学生中的高中生参加公益劳动时间的中位数可能在 20-30 之间

所有合理推断的序号是

（A）①③　　　　（B）②④

（C）①②③　　　　（D）①②③④

【答案】C

【解析】①由条形统计图可得男生人均参加公益劳动时间为 24.5h，女生为 25.5h，则平均数一定在 24.5-25.5 之间，故①正确.

②由统计表类别栏计算可得，各时间段人数分别为 15，60，51，62，12，则中位数在 20-30 之间，故②正确.

③由统计表计算可得，初中学段栏 $0\leqslant t<10$ 的人数在 0-15 之间，当人数为 0 时，中位数在 20-30 之间；当人数为 15 时，中位数在 20-30 之间，故③正确.

④由统计表计算可得，高中学段栏各时间段人数分别为 0-15，35，15，18，1 ，当 $0\leqslant t<10$ 时间段人数为 0 时，中位数在 10-20 之间；当 $0\leqslant t<10$ 时间段人数为 15 时，中位数在 10-20 之间，故④错误.

难度中.

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9．若分式 $\dfrac{x-1}{x}$ 的值为 0，则 x 的值为_____.

【答案】1

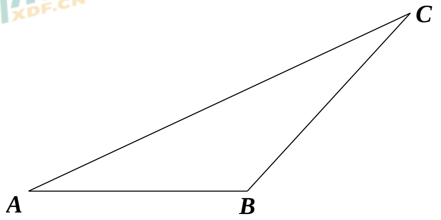
【解析】本题考查分式值为 0，令分母 $x\neq0$，分子 $x-1=0$，可得 $x=1$.

10．如图，已知 $\triangle ABC$，通过测量、计算得 $\triangle ABC$ 的面积约为_____cm^2.（结果保留一位小数）

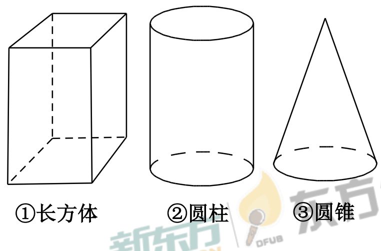
【答案】测量可知

【解析】本题考查三角形面积，直接动手操作测量即可.

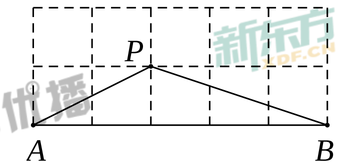
11．在如图所示的几何体中，其三视图中有矩形的是_____．（写出所有正确答案的序号）



第10题图



第11题图



第12题图

【答案】①②

【解析】本题考查对三视图的认识。①长方体的主视图和左视图为矩形；②圆柱的主视图为矩形，故选①②

12．如图所示的网格是正方形网格，则$\angle PAB+\angle PBA=$________°（点 A，B，P 是网格线交点）．

【答案】45

【解析】本题考查三角形外角，可延长 AP 构造一个等腰直角三角形，利用外角和得 45°.

13．在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(a,\ b)(a>0,\ b>0)$ 在双曲线 $y=\frac{k_1}{x}$ 上．点 A 关于 x 轴的对称点 B 在双曲线 $y=\frac{k_2}{x}$ 上，则 k_1+k_2 的值为_____．

【答案】0

【解析】本题考查反比例函数性质，$A(a,\ b)$ 在反比例 $y=\frac{k_1}{x}$ 上，则 $k_1=ab$，A 关于 x 轴的对称点 B 的坐标为 $(a,-b)$，又因为 B 在 $y=\frac{k_2}{x}$ 上，则 $k_2=-ab$，所以 $k_1+k_2=0$.

14．把图 1 中的菱形沿对角线分成四个全等的直角三角形，将这四个直角三角形分别拼成如图 2，图 3 所示的正方形，则图 1 中菱形的面积为_____．

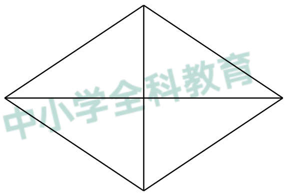


图1

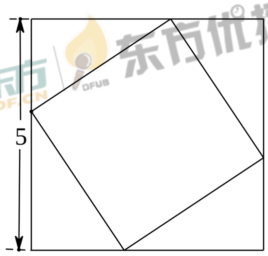


图2

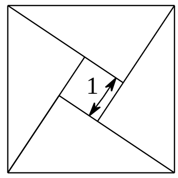


图3

【答案】12

【解析】设图 1 中小直角三角形的两直角边分别为 a，b，则由图 2、图 3 可列方程组 $\begin{cases} a+b=5 \\ b-a=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$，所以菱形的面积 $S=\frac{1}{2}\times4\times6=12$.

15．小天想要计算一组数据 92，90，94，86，99，85 的方差 s_0^2．在计算平均数的过程中，将这组数据中的每一个数都减去 90，得到一组新数据 2，0，4，-4，9，-5．记这组新数据的方差为 s_1^2，则 s_1^2 ______ s_0^2. (填“>”，“=”或“<”)

【答案】=

【解析】本题考查方差的性质，两组数据的平均值分别为 91 和 1，利用方差公式可得 $s_1^2=s_0^2$.

16．在矩形 $ABCD$ 中，M，N，P，Q 分别为边 AB，BC，CD，DA 上的点（不与端点重合）.

对于任意矩形 $ABCD$，下面四个结论中，

①存在无数个四边形 $MNPQ$ 是平行四边形；

②存在无数个四边形 $MNPQ$ 是矩形；

③存在无数个四边形 $MNPQ$ 是菱形；

④至少存在一个四边形 $MNPQ$ 是正方形.

所有正确结论的序号是______.

【答案】①②③

【解析】本题考查四边形判定，难.

三、解答题（本题共 68 分，第 17-21 题，每小题 5 分，第 22-24 题，每小题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题，每小题 7 分）

解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17．计算：$\left|-\sqrt{3}\right|-(4-\pi)^{0}+2\sin 60^{\circ}+(\frac{1}{4})^{-1}$.

【答案】$2\sqrt{3}+3$

【解析】

本题考查了实数的混合运算

原式$=\sqrt{3}-1+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4$

$=2\sqrt{3}+3$

18．解不等式组：$\begin{cases}4(x-1)<x+2, \\ \frac{x+7}{3}>x.\end{cases}$

【答案】$x<2$

【解析】

本题考查了一元一次不等式组的解法

解不等式①得：

$4(x-1)<x+2$

$4x-4<x+2$

$4x-x<4+2$

$3x<6$

$x<2$

解不等式②得：

$\frac{x+7}{3}>x$

$x+7>3x$

$x-3x>-7$

$-2x>-7$

$x<\frac{7}{2}$

∴此不等式组的解集为 $x<2$.

19．关于 x 的方程 $x^2-2x+2m-1=0$ 有实数根，且 m 为正整数，求 m 的值及此时方程的根．

【答案】m=1，此时方程的根为 $x_1=x_2=1$

【解析】

本题考查了根的判别式及一元二次方程的解法

∵ $x^2-2x+2m-1=0$ 有实数根

∴ $\Delta \geqslant 0$

∴ $(-2)^2-4(2m-1)\geqslant 0$

∴ $m\leqslant 1$

∵ m 为正整数

∴ $m=1$

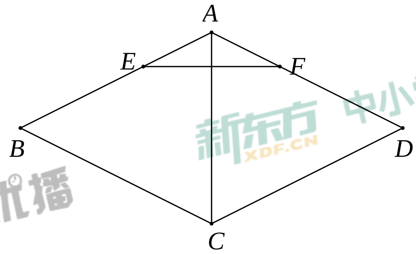
∴ $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

∴ $x_1=x_2=1$

∴ m=1，此时方程的根为 $x_1=x_2=1$

20．如图，在菱形 $ABCD$ 中，AC 为对角线，点 E，F 分别在 AB，AD 上，$BE=DF$，连接 EF.



（1）求证：$AC\perp EF$；

（2）延长 EF 交 CD 的延长线于点 G，连接 BD 交 AC 于点 O，若 BD=4，$\tan G=\dfrac{1}{2}$，求 AO 的长.

【答案】

（1）具体过程见下面详细解析；

（2）$AO=1$.

【解析】

平行四边形与菱形的判定及性质，以及三角函数的使用

（1）∵四边形 $ABCD$ 为菱形

∴$AB=AD$，AC 平分 $\angle BAD$

∵$BE=FD$

∴ $AB-BE=AD-FD$

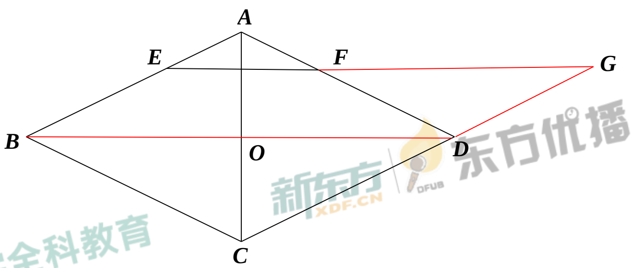
∴$AE=AF$

∴ $\triangle AEF$ 是等腰三角形

∴AC 平分 $\angle BAD$

∴$AC\perp EF$

（2）∵四边形 $ABCD$ 为菱形



∴$CG/\!/AB$，$BO=\dfrac{1}{2}BD=2$

∵$EF/\!/BD$

∴四边形 $EBDG$ 为平行四边形

∴$\angle G=\angle ABD$

$\therefore \tan\angle ABD=\tan G=\dfrac{1}{2}$

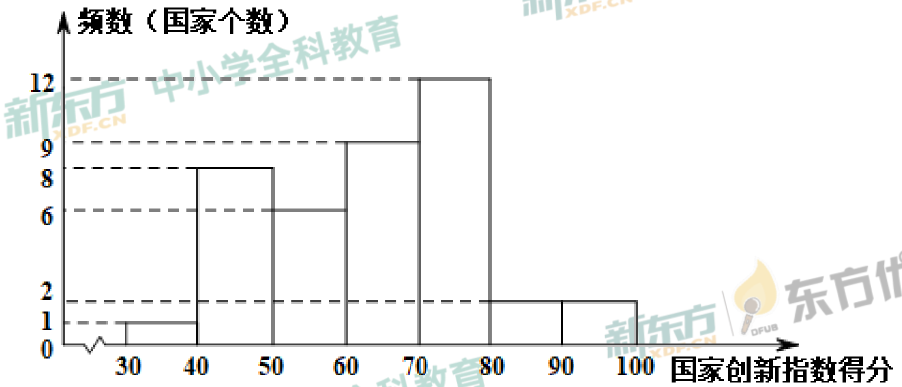
$\therefore \tan\angle ABD=\dfrac{AO}{BO}=\dfrac{AO}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore AO=1$

21．国家创新指数是反映一个国家科学技术和创新竞争力的综合指数．对国家创新指数得分排名前 40 的国家的有关数据进行收集、整理、描述和分析．下面给出了部分信息：

a．国家创新指数得分的频数分布直方图（数据分成 7 组：

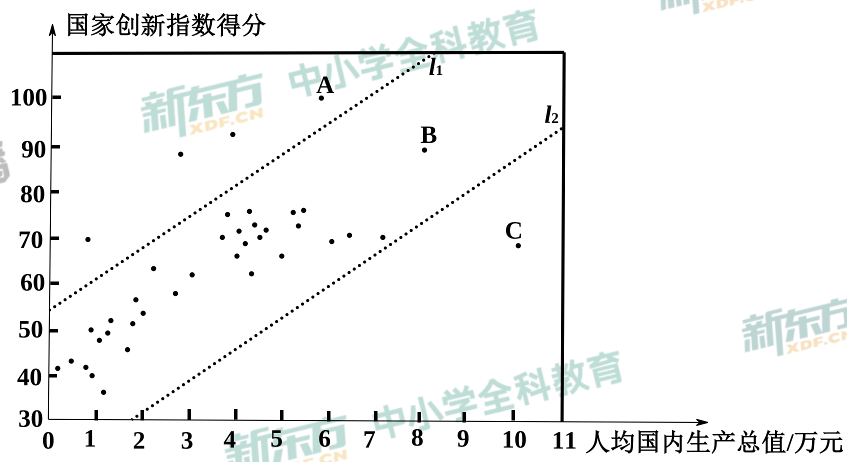
$30\le x<40$，$40\le x<50$，$50\le x<60$，$60\le x<70$，$70\le x<80$，$80\le x<90$，$90\le x\le 100$）；



b．国家创新指数得分在 $60\le x<70$ 这一组的是：

61.7　62.4　63.6　65.9　66.4　68.5　69.1　69.3　69.5

c．40 个国家的人均国内生产总值和国家创新指数得分情况统计图：



d．中国的国家创新指数得分为 69.5.

（以上数据来源于《国家创新指数报告（2018）》）

根据以上信息，回答下列问题：

（1）中国的国家创新指数得分排名世界第_____；

（2）在 40 个国家的人均国内生产总值和国家创新指数得分情况统计图中，包括中国在内的少数几个国家所对应的点位于虚线 l_1 的上方．请在图中用"○"圈出代表中国的点；

（3）在国家创新指数得分比中国高的国家中，人均国内生产总值的最小值约为_____万美元；（结果保留一位小数）

（4）下列推断合理的是_____．

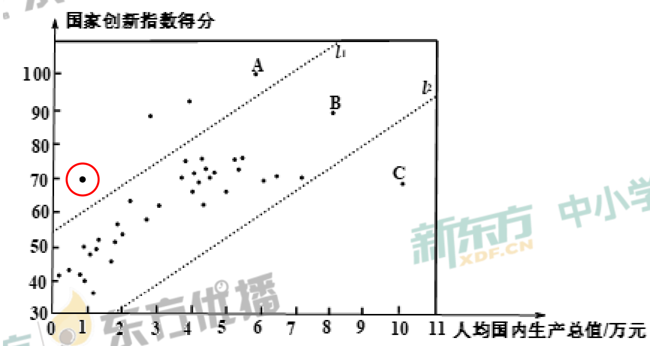
①相比于点 A，B 所代表的国家，中国的国家创新指数得分还有一定差距，中国提出"加快建设创新型国家"的战略任务，进一步提高国家综合创新能力；

②相比于点 B，C 所代表的国家，中国的人均国内生产总值还有一定差距，中国提出"决胜全面建成小康社会"的奋斗目标，进一步提高人均国内生产总值．

【答案】

（1）17

（2）



（3）2.7

（4）①②

【解析】

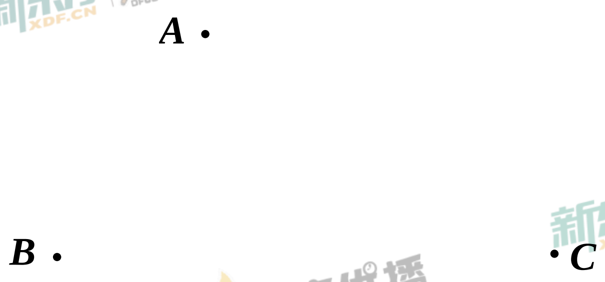
本题主要考查了频数分布直方图等相关统计图。

（1）中国是 $60\le x<70$ 的第一名，$70\le x<80$ 组有 12 个，$80\le x<90$ 和 $90\le x\le 100$ 各有 2 个，所以中国排名为 $12+2+2+1=17$ 名.

22．在平面内，给定不在同一直线上的点 A，B，C，如图所示．点 O 到点 A，B，C 的距离均等于 a（a 为常数），到点 O 的距离等于 a 的所有点组成图形 G，$\angle ABC$ 的平分线交图形 G 于点 D，连接 AD，CD.

（1）求证：$AD=CD$；

（2）过点 D 作 $DE\perp BA$，垂足为 E，作 $DF\perp BC$，垂足为 F，延长 DF 交图形 G 于点 M，连接 CM．若 $AD=CM$，求直线 DE 与图形 G 的公共点个数.



【答案】

（1）具体过程见下面详细解析；

（2）直线 DE 与图形 G 的公共点个数为 1.

【解析】

本题考查了垂径定理推论，圆周角定理及其推论，切线判定.

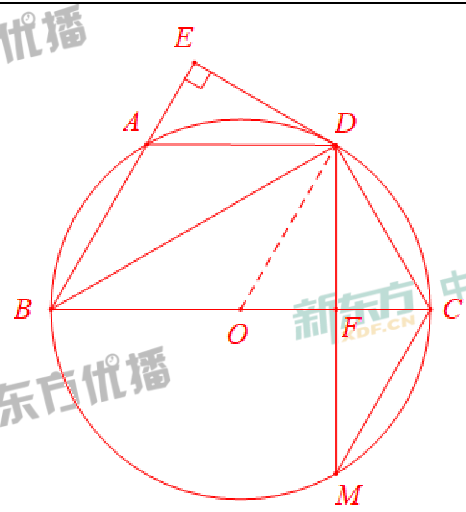
（1）∵ BD 平分 $\angle ABC$

∴ $\angle ABD=\angle CBD$

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$

∴ $AD=CD$

（2）∵$AD=CD$，$AD=CM$



∴$CD=CM$

∵$DF\perp BC$

∴$\angle DFC=\angle CFM=90°$

在 Rt△CDF 和 Rt△CMF 中，

$\begin{cases} CD=CM \\ CF=CF \end{cases}$

∴△CDF≌△CMF（HL）

∴$DF=MF$

∴BC 为弦 DM 的垂直平分线

∴BC 为⊙O 的直径

连接 OD

∵ $\angle COD=2\angle CBD$， $\angle ABC=2\angle CBD$

∴ $\angle ABC=\angle COD$

∴ $OD\parallel BE$

又∵$DE\perp BA$

∴ $\angle DEB=90°$

∴ $\angle ODE=90°$，即 $OD\perp DE$

∴DE 为⊙O 的切线

∴直线 DE 与图形 G 的公共点个数为 1.

23．小云想用 7 天的时间背诵若干首诗词，背诵计划如下：

①将诗词分成 4 组，第 i 组有 x_i 首，$i=1$，2，3，4；

②对于第 i 组诗词，第 i 天背诵第一遍，第（$i+1$）天背诵第二遍，第（$i+3$）天背诵第三遍，三遍后完成背诵，其它天无需背诵，$i=1$，2，3，4；

	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天	第 6 天	第 7 天
第 1 组	x_1	x_1		x_1			
第 2 组		x_2	x_2		x_2		
第 3 组							
第 4 组				x_4	x_4		x_4

③每天最多背诵 14 首，最少背诵 4 首.

解答下列问题：

（1）填入 x_3 补全上表；

（2）若 $x_1=4$，$x_2=3$，$x_3=4$，则 x_4 的所有可能取值为________；

（3）7 天后，小云背诵的诗词最多为______首.

【答案】

（1）如下图

	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天	第 6 天	第 7 天
第 1 组							
第 2 组							
第 3 组			x_3	x_3		x_3	
第 4 组							

（2）4，5，6

（3）23

【解析】

（1）把 $i=3$ 代入 x_i，填空即可.

（2）根据上表，可列不等式组：

$$\begin{cases}4\leqslant x_1+x_3+x_4\leqslant 14\\4\leqslant x_2+x_4\leqslant 14\\4\leqslant x_4\leqslant 14\end{cases}$$

可得出 $4\leqslant x_4\leqslant 6$

（3）确定第 4 天，$x_1+x_3+x_4=14$

由第 2 天，第 3 天，第 5 天可得

$$\begin{cases}4\leqslant x_1+x_2\leqslant 14\\4\leqslant x_2+x_3\leqslant 14\\4\leqslant x_2+x_4\leqslant 14\end{cases}$$

$\therefore 12\leqslant x_1+x_3+x_4+3x_2\leqslant 42$

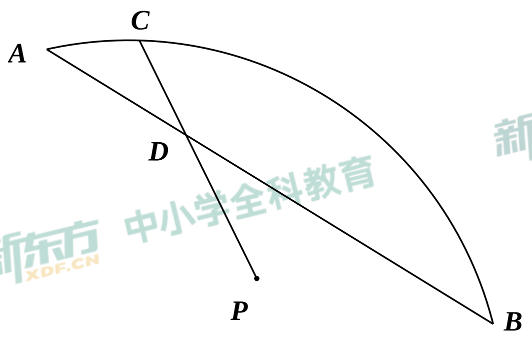
$-2\leqslant 3x_2\leqslant 28$

$-\dfrac{2}{3}\leqslant x_2\leqslant \dfrac{28}{3}$

可取 x_2 最大整数值为 9

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=14+9=23$

24．如图，P 是 $\overset{\frown}{AB}$ 与弦 AB 所围成的图形的外部的一定点，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上一动点，连接 PC 交弦 AB 于点 D.



小腾根据学习函数的经验，对线段 PC，PD，AD 的长度之间的关系进行了探究．

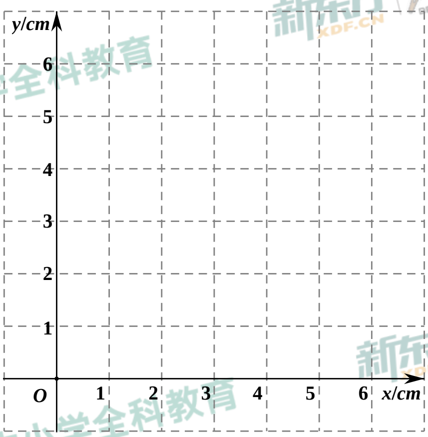
下面是小腾的探究过程，请补充完整：

（1）对于点 C 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上的不同位置，画图、测量，得到了线段 PC，PD，AD 的长度的几组值，如下表：

	位置 1	位置 2	位置 3	位置 4	位置 5	位置 6	位置 7	位置 8
PC/cm	3.44	3.30	3.07	2.70	2.25	2.25	2.64	2.83
PD/cm	3.44	2.69	2.00	1.36	0.96	1.13	2.00	2.83
AD/cm	0.00	0.78	1.54	2.30	3.01	4.00	5.11	6.00

在 PC，PD，AD 的长度这三个量中，确定_____的长度是自变量，_____的长度和_______的长度都是这个自变量的函数；

（2）在同一平面直角坐标系 xOy 中，画出（1）中所确定的函数的图象；

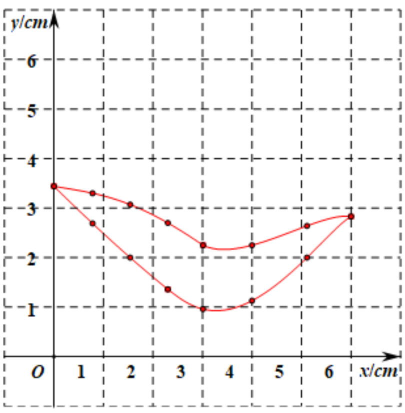


（3）结合函数图象，解决问题：当 $PC=2PD$ 时，AD 的长度约为_____cm．

【答案】

（1）AD，PC，PD；

（2）



（3）2.29 或 3.98

25．在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l：$y=kx+1(k\neq 0)$ 与直线 $x=k$，直线 $y=-k$ 分别交于点 A，B，直线 $x=k$ 与直线 $y=-k$ 交于点 C．

（1）求直线 l 与 y 轴的交点坐标；

（2）横、纵坐标都是整数的点叫做整点．记线段 AB，BC，CA 围成的区域（不含边界）为 W．

①当 $k=2$ 时，结合函数图象，求区域 W 内的整点个数；

②若区域 W 内没有整点，直接写出 k 的取值范围．

【答案】

（1）$(0,1)$

（2）① 6 个

②$-1\leqslant k<0$ 或 $k=-2$

【解析】

（1）令 $x=0$

则 $y=1$

∴直线 l 与 y 轴交点坐标为 $(0,1)$

（2）①当 $k=2$ 时，直线 l：$y=2x+1$

把 $x=2$ 代入直线 l

则 $y=5$

$\therefore A(2,5)$

把 $y=-2$ 代入直线 l

$-2=2x+1$

$x=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore B(-\dfrac{3}{2},-2)$

$C(2,-2)$

整点有 $0,-1$ ， $0,0$ ， $1,-1$ ， $1,0$ ， $1,1$ ， $1,2$ ，共 6 个

②$-1\leqslant k<0$ 或 $k=-2$

26．在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx-\dfrac{1}{a}$ 与 y 轴交于点 A，将点 A 向右平移 2 个单位长度，得到点 B，点 B 在抛物线上．

（1）求点 B 的坐标（用含 a 的式子表示）；

（2）求抛物线的对称轴；

（3）已知点 $P(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{a})$，$Q(2,2)$．若抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点，结合函数图象，求 a 的取值范围．

【答案】

（1） $B(2,-\dfrac{1}{a})$；

（2）直线 $x=1$；

（3）$a\leqslant-\dfrac{1}{2}$．

【解析】

（1）$\because$抛物线与 y 轴交于点 A,

$\therefore$令 $x=0$，$\therefore y=-\dfrac{1}{a}$,

$\therefore$点 A 坐标 $(0,-\dfrac{1}{a})$,

$\because$点 A 向右平移两个单位长度，得到点 B,

$\therefore$点 B 坐标 $(2,-\dfrac{1}{a})$．

（2）$\because$抛物线过点 $A(0,-\frac{1}{a})$ 和点 $B(2,-\frac{1}{a})$，

$\therefore$由对称性可得，抛物线对称轴为直线 $x=1$.

（3）①当 $a>0$ 时，则 $-\frac{1}{a}<0$，

分析图象可得：根据抛物线的对称性，抛物线不可能同时经过点 A 和点 P；也不可能同时经过点 B 和点 Q，所以，此时线段 PQ 与抛物线没有交点.

②当 $a<0$ 时，则 $-\frac{1}{a}>0$，

分析图象可得：根据抛物线的对称性，抛物线不可能同时经过点 A 和点 P；但当点 Q 在点 B 上方或与点 B 重合时，抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点，此时 $-\frac{1}{a}\leqslant 2$，

即 $a\leqslant -\frac{1}{2}$.

综上所述，当 $a\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点.

27．已知 $\angle AOB=30°$，H 为射线 OA 上一定点，$OH=\sqrt{3}+1$，P 为射线 OB 上一点，M 为线段 OH 上一动点，连接 PM，满足 $\angle OMP$ 为钝角，以点 P 为中心，将线段 PM 顺时针旋转 $150°$，得到线段 PN，连接 ON.

（1）依题意补全图 1；

（2）求证：$\angle OMP=\angle OPN$；

（3）点 M 关于点 H 的对称点为 Q，连接 QP．写出一个 OP 的值，使得对于任意的点 M 总有 $ON=QP$，并证明.

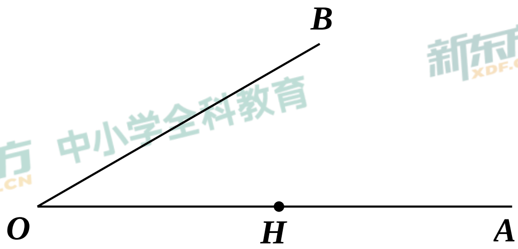
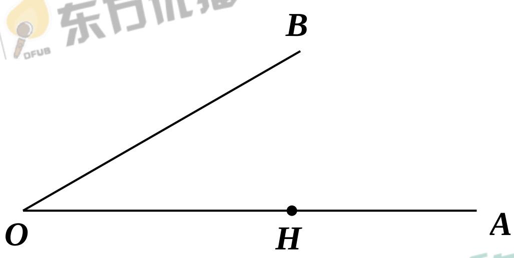


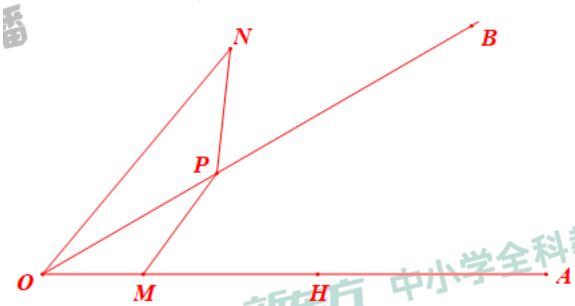
图1



备用图

【答案】

（1）见图



（2）见解析；

（3）$OP=2$．

【解析】

（2）

在$\triangle OPM$中，$\angle OMP=180°-\angle POM-\angle OPM=150°-\angle OPM$

$\angle OPN=\angle MPN-\angle OPM=150°-\angle OPM$

$\therefore\angle OMP=\angle OPN$

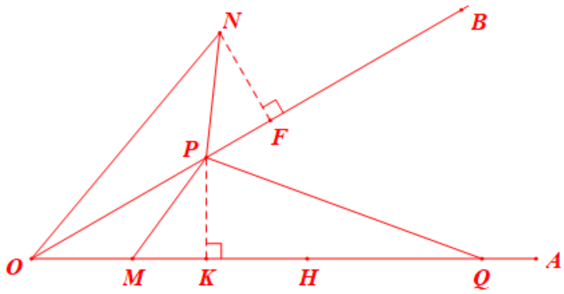
（3）

过点P作$PK\perp OA$，过点N作$NF\perp OB$

$\because\angle OMP=\angle OPN$

$\therefore\angle PMK=\angle NPF$

在$\triangle NPF$和$\triangle PMK$中



$$\begin{cases}\angle NPF=\angle PMK\\ \angle NFO=\angle PKM=90^\circ\\ PN=PM\end{cases}$$

$\therefore \triangle NPF\cong\triangle PMK$（AAS）

$\therefore PF=MK$， $\angle PNF=\angle MPK$， $NF=PK$

又$\because ON=PQ$

在 Rt$\triangle NOF$ 和 Rt$\triangle PKQ$ 中

$$\begin{cases}ON=PQ\\ NF=PK\end{cases}$$

$\therefore$ Rt$\triangle NOF\cong$Rt$\triangle PKQ$（HL）

$\therefore KQ=OF$

设 $MK=y$， $PK=x$

$\because \angle POA=30^\circ$， $PK\perp OQ$

$\therefore OP=2x$， $\therefore OK=\sqrt{3}x$， $OM=\sqrt{3}x-y$

$\therefore OF=OP+PF=2x+y$

$MH=OH-OM=\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}x-y)$

$KH=OH-OK=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}x$

$\because M$ 与 Q 关于 H 对称

$\therefore MH=HQ$

$\therefore KQ=KH+HQ$

$=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}x+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}x+y$

$=2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}x+y$

$\because KQ=OF$

$\therefore 2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}x+y=2x+y$

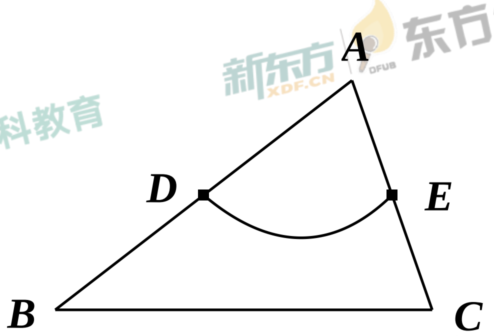
$\therefore 2\sqrt{3}+2=x(2+2\sqrt{3})$

$\therefore x=1$，即 $PK=1$

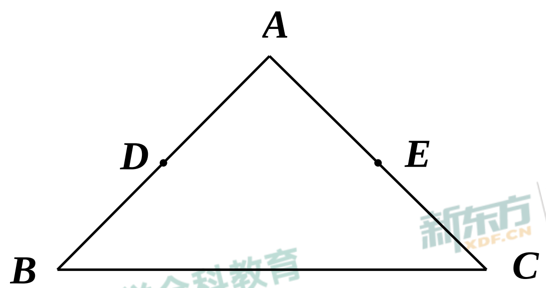
$\because \angle POA=30°$

$\therefore OP=2$

28．在$\triangle ABC$中，D，E分别是$\triangle ABC$两边的中点，如果$\overset{\frown}{DE}$上的所有点都在$\triangle ABC$的内部或边上，则称$\overset{\frown}{DE}$为$\triangle ABC$的中内弧．例如，下图中$\overset{\frown}{DE}$是$\triangle ABC$的一条中内弧．



（1）如图，在 Rt$\triangle ABC$中，$AB=AC=2\sqrt{2}$，D，E分别是AB，AC的中点．画出$\triangle ABC$的最长的中内弧$\overset{\frown}{DE}$，并直接写出此时$\overset{\frown}{DE}$的长；



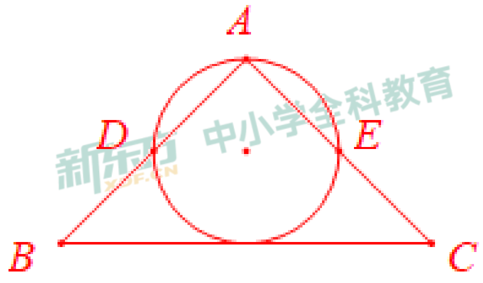
（2）在平面直角坐标系中，已知点$A(0,2)$，$B(0,0)$，$C(4t,0)(t>0)$，在$\triangle ABC$中，D，E分别是AB，AC的中点．

①若$t=\frac{1}{2}$，求$\triangle ABC$的中内弧$\overset{\frown}{DE}$所在圆的圆心P的纵坐标的取值范围；

②若在$\triangle ABC$中存在一条中内弧$\overset{\frown}{DE}$，使得$\overset{\frown}{DE}$所在圆的圆心P在$\triangle ABC$的内部或边上，直接写出t的取值范围．

【答案】

（1）如图：



$l=\frac{n\pi r}{180}=\frac{180\pi\cdot 1}{180}=\pi$

（2）

①P 的纵坐标 $y_P \geqslant 1$ 或 $y_P \leqslant \frac{1}{2}$；

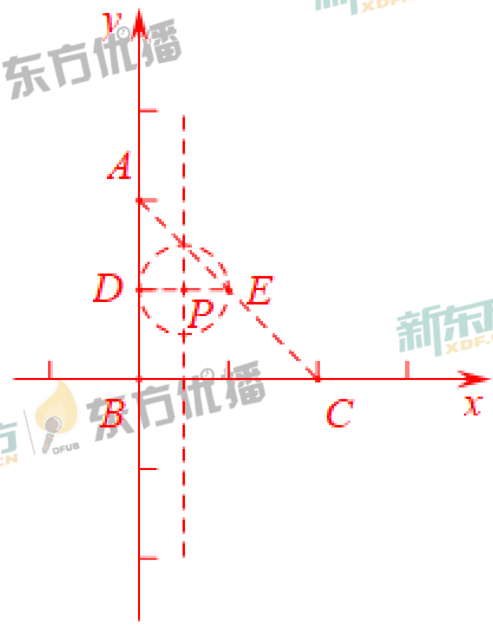
②$0<t\leqslant\sqrt{2}$

【解析】

（2）

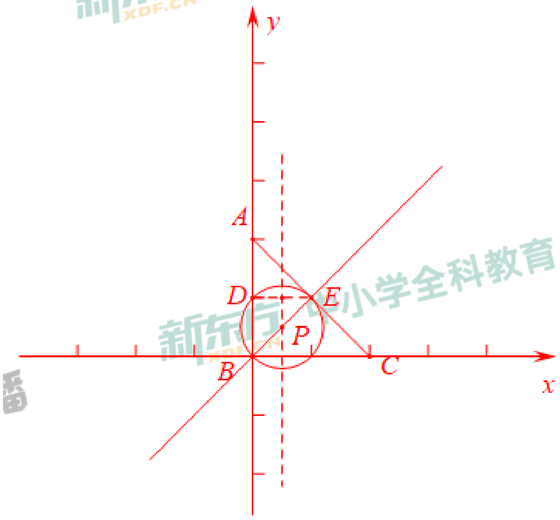
①当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$C(2,0)$，$D(0,1)$，$E(1,1)$

a.当 P 为 DE 的中点时，$\overset{\frown}{DE}$ 是中内弧，$\therefore P\left(\frac{1}{2},1\right)$



b.当$\odot P$与AC相切时，$y_{AC}=-x+2$，$y_{BE}=x$，

当$x=\frac{1}{2}$时，$y=\frac{1}{2}$，$\therefore P(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$



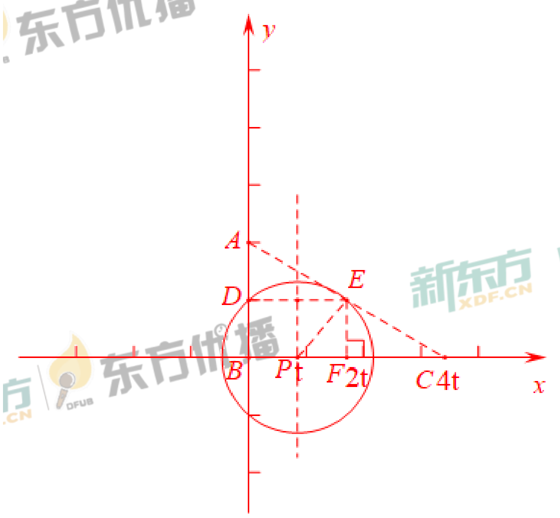
$\therefore$综上，P的纵坐标$y_P\geqslant 1$或$y_P\leqslant\frac{1}{2}$.

②

$a.PE\perp AC$时，$\triangle EFC\backsim\triangle PFE$，

得$\frac{EF}{PF}=\frac{FC}{FE}$，$\frac{1}{t}=\frac{2t}{1}$，$\therefore t^2=\frac{1}{2}(t>0)$，$\therefore t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore 0<t\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

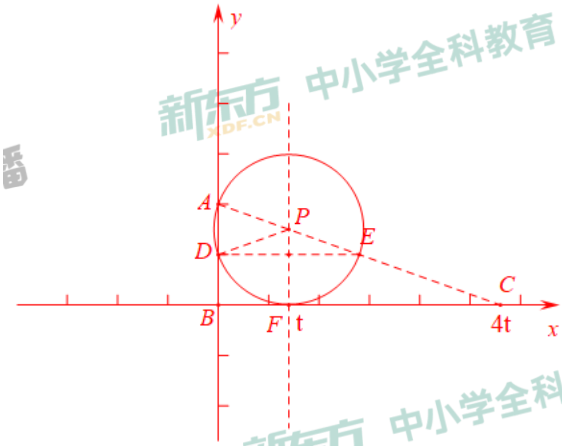


$b.\triangle PFC\backsim\triangle ABC$，得 $\frac{PF}{AB}=\frac{FC}{BC}$，$\frac{PF}{2}=\frac{3}{4}$，$\therefore PF=\frac{3}{2}$

$DP=PF=r$，$PE=\frac{1}{2}$，$DP=\frac{3}{2}$

$\therefore t=\sqrt{2}$

$\therefore 0<t\leqslant\sqrt{2}$



综上，$0<t\leqslant\sqrt{2}$.