

## 2019 北京市朝阳区高三一模数学考试（文科）逐题解析

2019.3

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

## 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 在复平面内,复数  $z = \frac{1+2i}{i}$  对应的点位于

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

【答案】D

【解析】本题考查复数运算与坐标表示.

$$z = \frac{1+2i}{i} = \frac{(-i)(1+2i)}{i \times (-i)} = \frac{2-i}{1} = 2-i$$

对应复平面内的点  $(2, -1)$ , 位于第四象限, 故选 D.

2. 设实数  $x, y$  满足不等式组  $\begin{cases} y \geq 0, \\ x-y+1 \geq 0, \\ x+y-1 \leq 0, \end{cases}$  则  $2x+y$  的最大值是

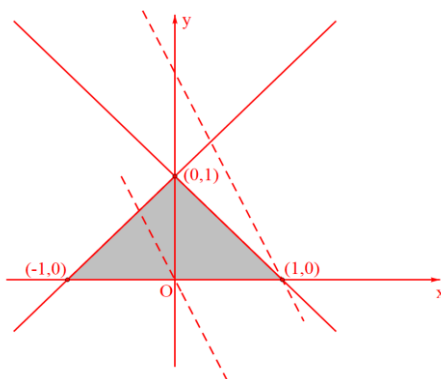
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【答案】B

【解析】本题考查线性规划.

根据限制条件, 得可行域如图所示:

令  $2x+y=z$ , 则  $y=-2x+z$ .



当  $x=0$  时,  $z$  为截距. 平移直线, 当过点  $(1,0)$  时截距最大.

此时得最大值  $z_{\max} = 2 \times 1 + 0 = 2$ , 故选 B.

3. 已知集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 且  $A \cap B = A$ , 则集合  $B$  可以是

- (A)  $\{x | 2^x > 1\}$  (B)  $\{x | x^2 > 1\}$  (C)  $\{x | \log_2 x > 1\}$  (D)  $\{1, 2, 3\}$

【答案】A

【解析】本题考查集合的运算和函数的性质.

A 选项:  $2^x > 1, x \in (0, +\infty)$ ,  $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 符合题意

B 选项:  $x^2 > 1, x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ,  $A \cap B = \{2, 3, 4, 5\} \neq A$ .

C 选项:  $\log_2 x > 1, x \in (2, +\infty)$ ,  $A \cap B = \{3, 4, 5\} \neq A$ .

D 选项:  $A \cap B = \{1, 2, 3\} \neq A$ .

故选 A.

4. 已知  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 120^\circ$ ,  $a = \sqrt{21}$ , 三角形  $ABC$  的面积为  $\sqrt{3}$ , 且  $b < c$ . 则  $c - b =$

- (A)  $\sqrt{17}$  (B) 3 (C) -3 (D)  $-\sqrt{17}$

【答案】B

【解析】本题考查正余弦定理和三角形面积公式的应用.

由  $\angle A = 120^\circ$ , 可知  $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos A = -\frac{1}{2}$ .

因为  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{3}$ , 解得  $bc = 4$ .

又  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ , 代入、化简得:  $b^2 + c^2 = 17$ .

所以  $(c - b)^2 = b^2 + c^2 - 2bc = 9$ .

因为  $b < c$ , 所以  $c - b > 0$ .

$c - b = \sqrt{9} = 3$ , 故选 B.

5. 已知  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , 给出下列条件: ①  $a^2 > b^2$ ; ②  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ; ③  $ac^2 > bc^2$ , 则使得  $a > b$  成立的充分而不必要条件是

- (A) ①                      (B) ②                      (C) ③                      (D) ①②③

【答案】C

【解析】本题考查充要条件的判定及不等式的性质.

①  $\because a^2 > b^2, \therefore |a| > |b| \not\Rightarrow a > b$ , 不符合题意;

②  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Rightarrow \begin{cases} a > b (a > 0, b > 0) \\ a < b (a < 0, b > 0) \\ a > b (a < 0, b < 0) \end{cases} \not\Rightarrow a > b$ , 不符合题意;

③ 充分条件:  $ac^2 > bc^2 \Rightarrow a > b$

必要条件:  $a > b, c^2 = 0$ , 则  $ac^2 = bc^2 \not\Rightarrow ac^2 > bc^2$ ,

所以只有③满足题意, 故选 C

6. 某三棱锥的三视图如图所示, 若网格纸上小正方形的边长为 1, 则该三棱锥的体积为

- (A) 4                      (B) 2                      (C)  $\frac{8}{3}$                       (D)  $\frac{4}{3}$

【答案】D

【解析】本题考查三视图.

三视图还原如图所示:

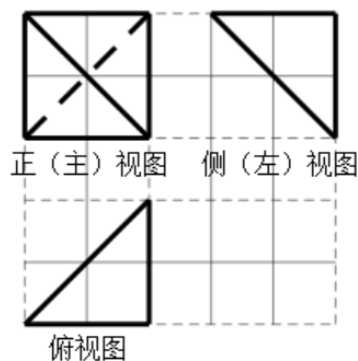
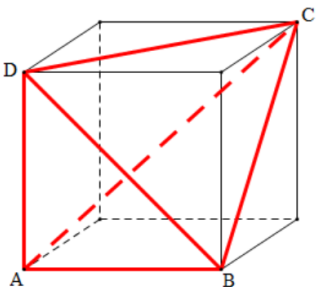
$\because$  正方形边长为 2,

$\therefore AB = 2, BC = 2\sqrt{2}$ ,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ,

点 D 到平面 ABC 的距离  $d = \sqrt{2}$ ,

$\therefore V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \times d \times S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \frac{4}{3}$ , 故选 D.



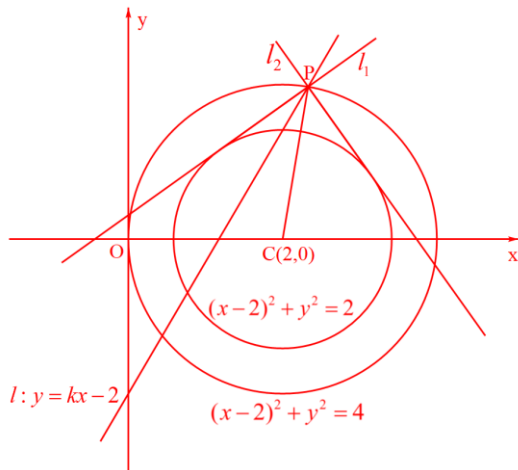
7. 已知圆  $C: (x-2)^2 + y^2 = 2$ , 直线  $l: y = kx - 2$ . 若直线  $l$  上存在点  $P$ , 过点  $P$  引圆的两条切线  $l_1, l_2$ , 使得  $l_1 \perp l_2$ , 则实数  $k$  的取值范围是

- (A)  $[0, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty)$  (B)  $[2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$   
 (C)  $(-\infty, 0)$  (D)  $[0, +\infty)$

【答案】D

【解析】本题考查直线与圆.

$\because P$  为  $l_1$  与  $l_2$  的交点, 且  $l_1 \perp l_2$ ,  $r = \sqrt{2}$ ,  $\therefore CP = 2$ ,  
 $\therefore$  点  $P$  轨迹为以  $(2, 0)$  为圆心, 以 2 为半径的圆,  
 如图所示: 则只需直线  $l$  与点  $P$  轨迹有交点即可,  
 即圆心到直线的距离小于等于半径即可.



根据点到直线距离公式  $d = \frac{|2k - 2|}{\sqrt{1 + k^2}} \leq 2$ , 解得  $k \geq 0$ , 故选 D.

8. 某单位周一、周二、周三开车上班的职工人数分别是 14, 10, 8. 若这三天中至少有一天开车上班的职工人数是 20, 则这三天都开车上班的职工人数至多是

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

【答案】B

【解析】本题考查集合与逻辑推理.

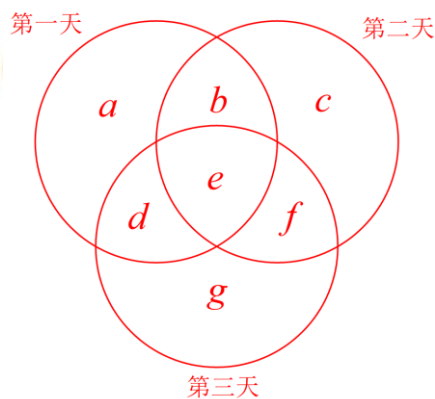
如图, 用  $a + b + d + e$  表示第一天开车的人数, 用  $d + e$  表示在第一、三天都开车上班的人数, 以此类推, 求  $e$  (即三天都开车上班的职工人数) 的最大值, 需注意,  $a \sim g$  都是自然数.

因为  $a + b + c + d + e + f + g = 20$

$a + c + g + 2b + 2d + 2f + 3e = 14 + 10 + 8 = 32$

所以  $b + d + f + 2e = 12$

当  $b = d = f = 0$  时,  $e$  取得最大值 6, 故选 B.



## 第二部分（非选择题 共 110 分）

## 二、填空题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

9. 已知平面向量  $\vec{a} = (2, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, x)$ . 若  $\vec{a} // \vec{b}$ , 则  $x =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $-\frac{1}{2}$

【解析】 本题考查平面向量.

因为  $\vec{a} // \vec{b}$ , 所以  $2x = (-1) \times 1$ , 解得  $x = -\frac{1}{2}$ .

10. 执行如图所示的程序框图, 则输出的  $x$  值为 \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{17}{12}$

【解析】 本题考查流程图.

$x$  的起始值为 2,  $n$  的起始值为 1

当  $n=1$  时,  $n \leq 2$ ,

判断为“是”, 进入循环, 代入计算得:

$$x = \frac{x^2 + 2}{2x} = \frac{2^2 + 2}{2 \times 2} = \frac{3}{2}$$

$$n = n + 1 = 1 + 1 = 2,$$

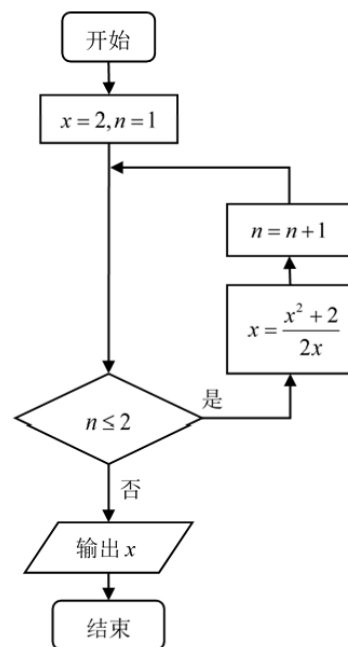
当  $n=2$  时,  $n \leq 2$ ,

判断为“是”, 进入循环, 代入计算得:

$$x = \frac{x^2 + 2}{2x} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{17}{12}$$

$$n = n + 1 = 2 + 1 = 3,$$

当  $n=3$  时, 判断为“否”, 跳出循环, 输出  $x = \frac{17}{12}$



11. 双曲线  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  的右焦点到其一条渐近线的距离是\_\_\_\_\_.

【答案】1

【解析】本题考查双曲线.

由  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  得:

$$a=2, b=1, c=\sqrt{5}$$

双曲线的渐近线方程为  $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{1}{2}x$ ,

即  $x \pm 2y = 0$

右焦点为  $(\sqrt{5}, 0)$

根据点到直线距离公式, 得  $d = \frac{|\sqrt{5} \pm 0|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 1$

12. 能说明“函数  $f(x)$  的图象在区间  $[0, 2]$  上是一条连续不断的曲线, 若  $f(0) \cdot f(2) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $(0, 2)$  内无零点”为假命题的一个函数是\_\_\_\_\_.

【答案】 $f(x) = (x-1)^2$

【解析】本题考查函数图象与命题.

开放性考题, 答案不唯一.



13. 天坛公园是明、清两代皇帝“祭天”“祈谷”的场所.天坛公园中的圜丘台共有三层（如下图所示），上层坛的中心是一块呈圆形的大理石板，从中心向外围以扇面形石铺成（如下图所示）.上层坛从第一环至第九环共有九环，中层坛从第十环至第十八环共有九环，下层坛从第十九环至第二十七环共有九环；第一环的扇面形石有9块，从第二环起，每环的扇面形石块数比前一环多9块，则第二十七环的扇面形石块数是\_\_\_\_\_；上、中、下三层坛所有的扇面形石块数是\_\_\_\_\_.



【答案】 243,3402

【解析】 本题考查等差数列.

由题意知,从第二环起,每环的扇面形石块数比前一环多9块,第一环的扇面形石有9块  
所以每环的扇面形石块数是一个首项为9 公差为9 的等差数列

所以通项公式为  $a_n = a_1 + (n-1)d = 9 + 9(n-1) = 9n$

所以  $a_{27} = 9 \times 27 = 243$

又因为前  $n$  项和公式为  $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

所以前 27 项和为  $S_{27} = \frac{27(a_1 + a_{27})}{2} = \frac{27 \times (9 + 243)}{2} = 3402$

14. 若不等式  $\log_a x + x - 4 > 0$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 在区间  $(0, 2)$  内有解, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

【答案】  $(0, 1) \cup (1, \sqrt{2})$

【解析】 本题考查不等式.

若不等式  $\log_a x + x - 4 > 0$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 在区间  $(0, 2)$  内有解,

设  $f(x) = \log_a x + x - 4$ ,

① 当  $a > 1$  时,  $f(x)$  在  $(0, 2)$  上单调递增,

只需  $f(2) = \log_a 2 + 2 - 4 > 0$

即  $\log_a 2 > 2$ , 解得  $a \in (1, \sqrt{2})$ .

② 当  $a \in (0, 1)$  时, 有  $0 < a^4 < 1$ ,

$\therefore a^4 \in (0, 2)$

$\therefore f(a^4) = \log_a a^4 + a^4 - 4 = a^4 > 0$  有解.

所以  $a \in (0, 1)$  时必有解.

综上,  $a$  的取值范围是  $(0, 1) \cup (1, \sqrt{2})$ .



## 三、解答题共 6 小题,共 80 分.解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程.

15. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x$ .(I) 求  $f(\frac{\pi}{3})$  的值及  $f(x)$  的最小正周期;(II) 若函数  $f(x)$  在区间  $[0, m]$  上单调递增,求实数  $m$  的最大值.

【解析】

(I) 因为  $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x$ 

$$= \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$$

$$= \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$$

$$\text{所以 } f(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{5\pi}{6}) + \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{又因为 } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

所以  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$ .(II) 因为  $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$ ,若  $f(x)$  单调递增,则需满足  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ,解得

$$-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

所以函数  $f(x)$  的单调增区间为  $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbf{Z}$

当  $k=0$  时, 函数  $f(x)$  的单调增区间为  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ ,

若函数  $f(x)$  在区间  $[0, m]$  上单调递增, 则  $[0, m] \subseteq [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ ,

所以实数  $m$  的最大值为  $\frac{\pi}{6}$ .

16. (本小题满分 13 分)

在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = \frac{1}{2}, a_4 = 4, n \in \mathbf{N}^*$ .

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 设  $b_n = a_n + n - 6$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_n > 0$ , 求  $n$  的最小值.

【解析】

(I) 数列  $\{a_n\}$  为等比数列, 且  $a_1 = \frac{1}{2}, a_4 = 4, n \in \mathbf{N}^*$

得  $a_4 = a_1 q^3 = 4$ , 解得  $q = 2$ .

数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-2}, n \in \mathbf{N}^*$ .

(II)  $b_n = a_n + n - 6 = n - 6 + 2^{n-2}$ ,

$\therefore S_n = (-5 - 4 + \cdots + n - 6) + (2^{-1} + 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-2})$

$$= \frac{n(n-11)}{2} + \frac{2^n - 1}{2}.$$

当  $n \geq 5$  时,  $\frac{n(n-11)}{2} \geq -15, \frac{2^n - 1}{2} \geq \frac{31}{2}$ , 所以  $S_n > 0$ ;

当  $n = 4$  时,  $S_4 = \frac{-4 \times 7 + 2^4 - 1}{2} < 0$ ;

$$\text{当 } n=3 \text{ 时, } S_3 = \frac{-3 \times 8 + 2^3 - 1}{2} < 0;$$

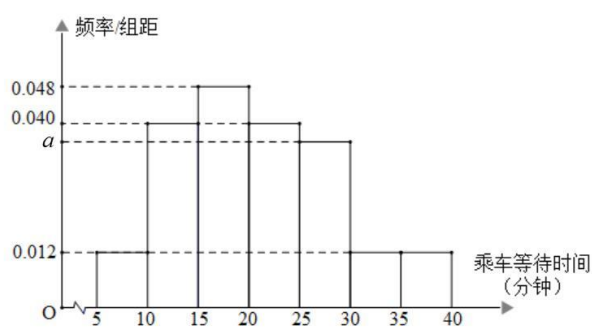
$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } S_2 = \frac{-2 \times 9 + 2^2 - 1}{2} < 0;$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } S_1 = \frac{-1 \times 10 + 2^1 - 1}{2} < 0.$$

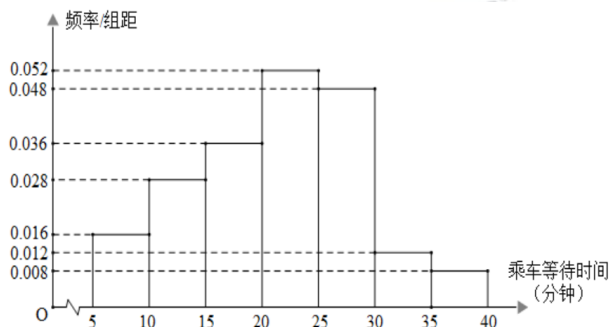
所以  $n$  的最小值为 5.

17. (本小题满分 13 分)

某部门在同一上班高峰时段对甲、乙两座地铁站各随机抽取了 50 名乘客,统计其乘车等待时间(指乘客从进站口到乘上车的时间,乘车等待时间不超过 40 分钟).将统计数据按  $[5,10), [10,15), [15,20), \dots, [35,40]$  分组,制成频率分布直方图:



甲站



乙站

(I) 求  $a$  的值;

(II) 记  $A$  表示事件“在上班高峰时段某乘客在甲站乘车等待时间少于 20 分钟”,试估计  $A$  的概率;

(III) 假设同组中的每个数据用该组区间左端点值来估计,记在上班高峰时段甲、乙两站各抽取的 50 名乘客乘车的平均等待时间分别为  $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ ,求  $\overline{X}_1$  的值,并直接写出  $\overline{X}_1$  与  $\overline{X}_2$  的大小关系.

## 【解析】

(I) 因为  $0.012 \times 5 \times 3 + 0.040 \times 5 \times 2 + 0.048 \times 5 + a \times 5 = 1$ ,

所以  $a = 0.036$ .

(II) 由题意可得,该乘客在甲站平均等待时间少于 20 分钟的频率为

$(0.012 + 0.040 + 0.048) \times 5 = 0.5$ , 故  $P(A)$  的估计值为 0.5.

(III)  $\overline{X_1} = (0.012 \times 5 + 0.040 \times 10 + 0.048 \times 15 + 0.040 \times 20 + 0.036 \times 25 + 0.012 \times 30 + 0.012 \times 35) \times 5 = 18.3$ .

由直方图知:  $\overline{X_1} < \overline{X_2}$ .

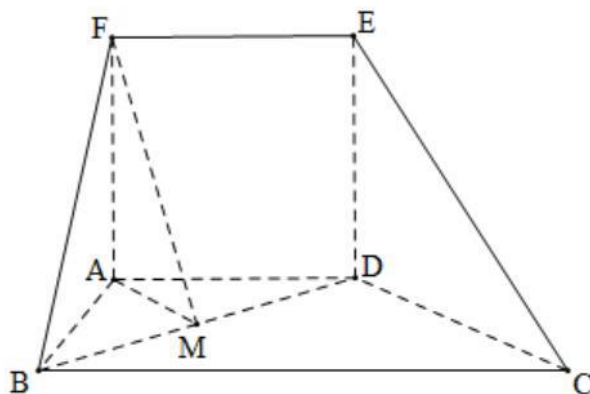
18. (本小题满分 14 分)

如图,在多面体  $ABCDEF$  中,平面  $ADEF \perp$  平面  $ABCD$ , 四边形  $ADEF$  为正方形, 四边形  $ABCD$  为梯形, 且  $AD \parallel BC$ ,  $\angle BAD = 90^\circ$ ,  $AB = AD = 1$ ,  $BC = 2$ .

(I) 求证:  $AF \perp CD$ ;

(II) 若  $M$  为线段  $BD$  的中点, 求证:  $CE \parallel$  平面  $AMF$ ;

(III) 求多面体  $ABCDEF$  的体积.



## 【解析】

(I) 因为四边形  $ADEF$  为正方形,

所以  $AF \perp AD$ ,

因为平面  $ADEF \perp$  平面  $ABCD$ ,

且平面  $ADEF \cap$  平面  $ABCD = AD$ ,  $AF \subset$  平面  $ADEF$ ,

所以  $AF \perp$  平面  $ABCD$ .

因为  $CD \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $AF \perp CD$ .

(II) 延长  $AM$  交  $BC$  于点  $G$ ,

因为  $AD \parallel BC$ ,  $M$  为  $BD$  中点,

所以  $\triangle BGM \cong \triangle DAM$ .

所以  $BG = AD = 1$ .

因为  $BC = 2$ ,

所以  $GC = 1$ .

由已知  $FE = AD = 1$ , 且  $FE \parallel AD$ ,

又因为  $AD \parallel GC$ , 所以  $FE \parallel GC$ , 且  $FE = GC$ ,

所以四边形  $GCEF$  为平行四边形, 所以  $CE \parallel GF$ .

因为  $CE \not\subset$  平面  $AMF$ ,  $GF \subset$  平面  $AMF$ ,

所以  $CE \parallel$  平面  $AMF$ .

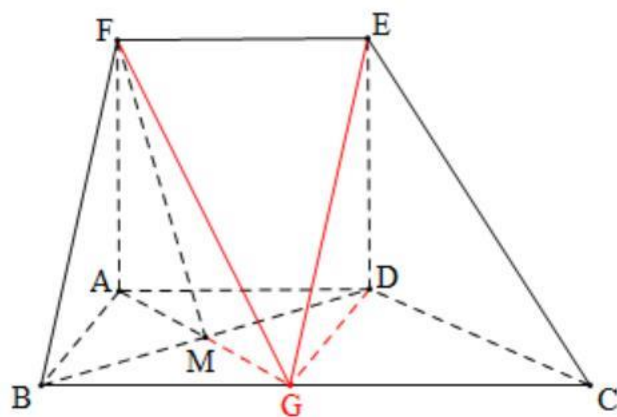
(III) 设  $G$  为  $BC$  中点, 连接  $DG, EG$ ,

由已知  $DG \parallel AB$ , 所以  $DG \parallel$  平面  $AFB$ ,

又因为  $DE \parallel AF$ , 所以  $DE \parallel$  平面  $AFB$ ,

因为  $DG \cap DE = D$ ,  $DG, DE \subset$  平面  $AFB$ ,

所以平面  $DEG \parallel$  平面  $AFB$ .



因为  $AD \perp AB, AD \perp AF$ , 所以  $AD \perp$  平面  $ABF$ ,

所以多面体  $AFB-DEG$  为直三棱柱.

因为  $AB = AF = AD = 1$ , 且  $\angle BAF = 90^\circ$ ,

$$\text{所以 } V_1 = V_{\text{三棱柱}AFB-DEG} = S_{\triangle AFB} \cdot AD = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}.$$

由已知  $DG \parallel AB$ , 且  $DG = AB$ ,

所以  $DG \perp GC$ , 且  $DG = GC = 1$ .

又因为  $DE \parallel AF, AF \perp$  平面  $CDG$ ,

所以  $DE \perp$  平面  $CDG$ .

因为  $DE = AF = 1$ ,

$$\text{所以 } V_2 = V_{\text{三棱锥}E-CDG} = \frac{1}{3} S_{\triangle CDG} \cdot DE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}.$$

$$\text{所以 } V_{\text{多面体}ABCDEF} = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

19. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = ae^x - 4x, a \in \mathbf{R}$ .

(I) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(II) 当  $a=1$  时, 求证: 曲线  $y=f(x)$  在抛物线  $y=-x^2-1$  的上方.

**【解析】**

(I) 求导得  $f'(x) = ae^x - 4$ , 定义域  $x \in \mathbf{R}$ .

① 当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) < 0$  恒成立, 函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减.



②当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) > 0$  得  $x > \ln \frac{4}{a}$ , 所以函数  $f(x)$  的单调递增区间是  $(\ln \frac{4}{a}, +\infty)$ ;

令  $f'(x) < 0$  得  $x < \ln \frac{4}{a}$ , 所以函数  $f(x)$  单调递减区间是  $(-\infty, \ln \frac{4}{a})$ .

综上所述, 当  $a \leq 0$  时, 函数  $f(x)$  的单调递减区间是  $\mathbf{R}$ ;

当  $a > 0$  时, 函数  $f(x)$  的单调递增区间是  $(\ln \frac{4}{a}, +\infty)$ ; 单调递减区间是  $(-\infty, \ln \frac{4}{a})$ .

(II) 由题, 只需证  $e^x - 4x + x^2 + 1 > 0$ .

设  $F(x) = e^x - 4x + x^2 + 1$ .

则  $F'(x) = e^x - 4 + 2x$ , 设  $G(x) = F'(x)$ .

因为  $G'(x) = e^x + 2 > 0$ , 所以  $G(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增.

又因为  $G(0) = -3 < 0$ ,  $G(1) = e - 2 > 0$ ,

所以  $G(x) = 0$  在  $(0, 1)$  内有唯一解, 记为  $x_0$ , 即  $e^{x_0} = 4 - 2x_0$ .

当  $x < x_0$  时,  $F'(x) < 0$ ,  $F(x)$  单调递减;

当  $x > x_0$  时,  $F'(x) > 0$ ,  $F(x)$  单调递增;

所以  $F(x)_{\min} = F(x_0) = e^{x_0} - 4x_0 + x_0^2 + 1 = x_0^2 - 6x_0 + 5, x_0 \in (0, 1)$ .

设  $g(x) = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4, x \in (0, 1)$ .

$g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减,

则  $g(x) > g(1) = 0$ .

所以  $F(x)_{\min} = F(x_0) > 0$ .

所以  $F(x) > 0$ , 即曲线  $y = f(x)$  在抛物线  $y = -x^2 - 1$  上方.

## 20. (本小题满分 14 分)

已知点  $M(x_0, y_0)$  为椭圆  $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  上任意一点, 直线  $l: x_0x + 2y_0y = 2$  与圆

$(x-1)^2 + y^2 = 6$  交于  $A, B$  两点, 点  $F$  为椭圆  $C$  的左焦点.

(I) 求椭圆  $C$  的离心率及左焦点  $F$  的坐标;

(II) 求证: 直线  $l$  与椭圆  $C$  相切;

(III) 判断  $\angle AFB$  是否为定值, 并说明理由.

【解析】

(I) 由题意得,  $a = \sqrt{2}, b = 1, a^2 = b^2 + c^2$ , 解得  $c = 1$ ,

所以离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 左焦点  $F(-1, 0)$ .

(II) ①当  $y_0 = 0$  时, 直线  $l$  方程为  $x = \pm\sqrt{2}$ ,

此时直线  $l$  与椭圆  $C$  相切.

②当  $y_0 \neq 0$  时, 联立  $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ x_0x + 2y_0y = 2 \end{cases}$  得  $x^2 + 2 \cdot \left(\frac{2-x_0x}{2y_0}\right)^2 - 2 = 0$ ,

$$\therefore x^2 + 2 \cdot \frac{4 - 4x_0x + x_0^2x^2}{4y_0^2} - 2 = 0,$$

$\because$  点  $M(x_0, y_0)$  在椭圆上,

$$\therefore \frac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 1,$$

$$\text{代入得 } x^2 + 2 \cdot \frac{4 - 4x_0x + x_0^2x^2}{4 \cdot \frac{2-x_0^2}{2}} - 2 = 0,$$

$$\therefore x^2 + \frac{4 - 4x_0x + x_0^2x^2}{2 - x_0^2} - 2 = 0,$$

$$\therefore x^2 \left(1 + \frac{x_0^2}{2 - x_0^2}\right) - \frac{4x_0x}{2 - x_0^2} + \frac{4 - (4 - 2x_0^2)}{2 - x_0^2} = 0,$$

$$\therefore \frac{2}{2 - x_0^2} x^2 - \frac{4x_0}{2 - x_0^2} x + \frac{2x_0^2}{2 - x_0^2} = 0,$$

$$\therefore \Delta = \left(\frac{4x_0}{2-x_0^2}\right)^2 - \frac{16x_0^2}{(2-x_0^2)^2} = 0.$$

此时直线  $l$  与椭圆  $C$  相切.

综上所述, 直线  $l$  与椭圆  $C$  相切.

(III)  $\angle AFB$  为定值  $90^\circ$ , 理由如下:

设点  $A(x_1, y_1)$  和点  $B(x_2, y_2)$ ,

① 当  $y_0 = 0$  时,  $x_1 = x_2, y_1 = -y_2, x_1 = \pm\sqrt{2}$ ,

$$\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = (x_1 + 1)^2 - y_1^2 = (x_1 + 1)^2 - 6 + (x_1 - 1)^2 = 2x_1^2 - 4 = 0,$$

$\therefore \overrightarrow{FA} \perp \overrightarrow{FB}$ , 即  $\angle AFB = 90^\circ$ .

② 当  $y_0 \neq 0$  时, 联立  $\begin{cases} x_0x + 2y_0y = 2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 6 \end{cases}$  得  $(4y_0^2 + x_0^2)x^2 - (8y_0^2 + 4x_0)x + 4 - 20y_0^2 = 0$ ,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{8y_0^2 + 4x_0}{4y_0^2 + x_0^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4 - 20y_0^2}{4y_0^2 + x_0^2}$$

$$\therefore \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = (x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) + y_1 \cdot y_2$$

$$= x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 + \frac{2 - x_0x_1}{2y_0} \cdot \frac{2 - x_0x_2}{2y_0}$$

$$= \frac{4(1 - 5y_0^2)}{4y_0^2 + x_0^2} + \frac{4(2y_0^2 + x_0)}{4y_0^2 + x_0^2} + \frac{4y_0^2 + x_0^2}{4y_0^2 + x_0^2} + \frac{4 - 2x_0(x_1 + x_2) + x_0^2x_1x_2}{4y_0^2}$$

$$= \frac{16y_0^2 - 32y_0^4 + 16y_0^2 - 16(2 - 2y_0^2)y_0^2}{4y_0^2(4y_0^2 + x_0^2)}$$

$$= \frac{32y_0^2 - 32y_0^4 - 32y_0^2 + 32y_0^4}{4y_0^2(4y_0^2 + x_0^2)} = 0$$

所以  $\overrightarrow{FA} \perp \overrightarrow{FB}$ , 即  $\angle AFB = 90^\circ$ .

综上所述,  $\angle AFB$  为定值  $90^\circ$ .