2018 年北京市海淀区高三（理）期中数学考试逐题解析

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.已知集合 $A=\{x|x-a\le 0\}$, $B=\{1,2,3\}$,若 $A\cap B\ne\varnothing$,则 a 的取值范围为

A. $(-\infty,1]$

B. $[1,+\infty)$

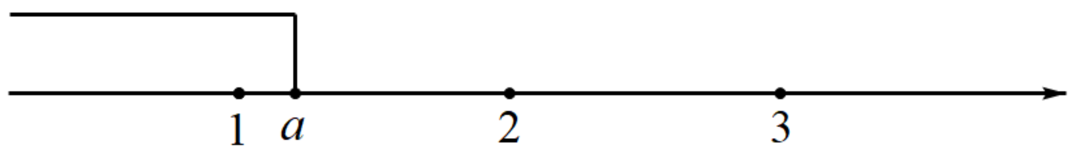
C. $(-\infty,3]$

D. $[3,+\infty)$

【答案】B

【解析】本题考查集合的运算.

集合 $A=\{x|x-a\le 0\}=\{x|x\le a\}$, $B=\{1,2,3\}$,若 $A\cap B\ne\varnothing$,



则 $a\ge 1$

故选 B.

2.下列函数中,是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A. $f(x)=x^2-|x|$

B. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

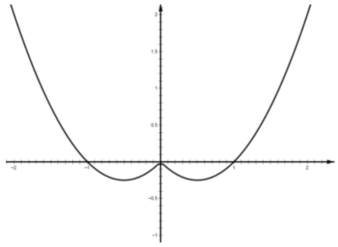
C. $f(x)=|\ln x|$

D. $f(x)=e^{|x|}$

【答案】D

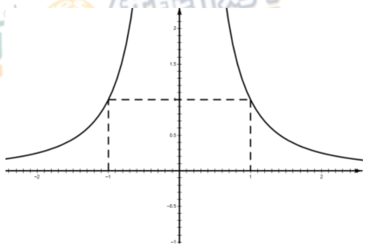
【解析】本题考查函数的单调性和奇偶性.

A. $f(x)=x^2-|x|$



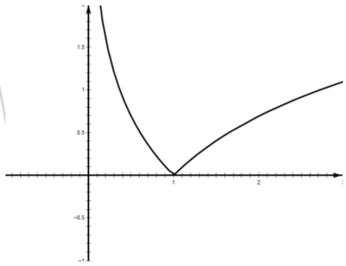
由图可知,函数 $f(x)=x^2-|x|$ 为偶函数,在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递减,在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增.

B. $f(x)=\frac{1}{x^2}$



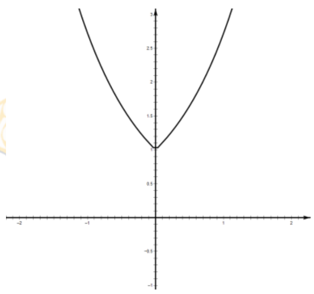
由图可知,函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 为偶函数,在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

C. $f(x)=|\ln x|$



由图可知,函数 $f(x)=|\ln x|$ 定义域为 $(0,+\infty)$,是非奇非偶函数,在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

D. $f(x)=e^{|x|}$



由图可知,函数 $f(x)=e^{|x|}$ 为偶函数,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

故选 D.

3. $\int_1^e \frac{1}{x}dx=$

A. -1　　　　B. 0

C. 1　　　　D. e

【答案】C

【解析】本题考查定积分公式.

$$\int_1^{e}\frac{1}{x}dx=\ln x|_1^{e}=\ln e-\ln 1=1-0=1.$$

故选 C.

4.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,\dfrac{a_6}{a_5}=2$,则公差d的值是

A. $-\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{3}$

C. $-\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

【答案】A

【解析】本题考查等差数列通项公式.

由已知$a_1=1$, $\dfrac{a_6}{a_5}=\dfrac{a_1+5d}{a_1+4d}=\dfrac{1+5d}{1+4d}=2$,

解得$d=-\dfrac{1}{3}$.

故选 A.

5.角θ终边经过点$P(4,y)$,且$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$,则$\tan\theta=$

A. $-\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{4}{3}$

C. $-\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

【答案】C

【解析】本题考查三角函数定义.

$$\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{4^2+y^2}}=-\frac{3}{5}$$

$\therefore y=-3$

$\therefore P$ 点坐标为 $(4,-3)$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=-\frac{3}{4}$$

故选 C.

6.已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+\dfrac{a}{n}$,则“$a_2>a_1$”是“数列 $\{a_n\}$ 单调递增”的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】本题考查数列单调性与简易逻辑的综合.

必要性:

$\because a_2>a_1$ 即 $2+\dfrac{a}{2}>1+a$,

$\therefore a<2$

$$a_{n+1}-a_n=n+1+\frac{a}{n+1}-(n+\frac{a}{n})=1+\frac{a}{n+1}-\frac{a}{n}=1+\frac{-a}{n(n+1)}=\frac{n^2+n-a}{n(n+1)}$$

其中 $(n^2+n-a)_{\min}=2-a$

$\because a<2 \therefore 2-a>0$

$\therefore a_{n+1}>a_n$

$\therefore$数列$\{a_n\}$单调递增,必要性得证.

充分性:

又$\because$数列$\{a_n\}$单调递增,

$\therefore a_2>a_1$,充分性得证.

故选 C.

7.已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$,且$\vec{a}^2>\vec{b}^2>\vec{c}^2$,则$\vec{a}\cdot\vec{b},\vec{b}\cdot\vec{c},\vec{c}\cdot\vec{a}$中最小的值是

A.$\vec{a}\cdot\vec{b}$

B.$\vec{b}\cdot\vec{c}$

C.$\vec{c}\cdot\vec{a}$

D.不能确定的

【答案】A

【解析】本题考查平面向量.

$\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=(-\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{c}^2-\vec{a}^2$

$\because \vec{c}^2<\vec{a}^2 \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}<0$

即$\vec{a}\cdot\vec{b}<\vec{b}\cdot\vec{c}$

同理$\vec{a}\cdot\vec{b}<\vec{c}\cdot\vec{a}$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}$最小

故选 A.

8. 函数 $f(x)=x,g(x)=x^2-x+3$. 若存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,\frac{9}{2}]$, 使得 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})+g(x_n)=g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_{n-1})+f(x_n)$, 则 n 的最大值为

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

【答案】D

【解析】本题考查函数.

令 $h(x)=g(x)-f(x)=x^2-2x+3(0\le x\le\frac{9}{2})$,

易知 $h(x)_{\min}=h(1)=2,h(x)_{\max}=h(\frac{9}{2})=\frac{57}{4}$.

$\because g(x_n)-f(x_n)=g(x_1)-f(x_1)+g(x_2)-f(x_2)+\cdots+g(x_{n-1})-f(x_{n-1})$,

即 $h(x_n)=h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_{n-1})$

$\because h(x)$ 的值域为 $[2,\frac{57}{4}]$,

$\therefore h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_{n-1})$ 的值域为 $[2(n-1),\frac{57}{4}(n-1)]$.

又 $\because$ 存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 使得 $h(x_n)=h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_{n-1})$ 成立,

$\therefore 2\le 2(n-1)\le\frac{57}{4}$

$\therefore 2\le n\le\frac{65}{8}$.

又 $\because n\in\mathbf{N}^*$,

$\therefore n$的最大值为 8.

故选 D.

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9.计算 $\lg 4+\lg 25=$______.

【答案】2

【解析】本题考查对数的运算

$\lg 4+\lg 25=\lg(4\times 25)=\lg 100=\lg 10^2=2$

10.已知平面向量 $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(3,1)$,则向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 夹角的大小为______.

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】本题考查平面向量的数量积

$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\because <\vec{a},\vec{b}>\in[0,\pi]$

$\therefore <\vec{a},\vec{b}>=\frac{\pi}{4}$

$\therefore \vec{a},\vec{b}$夹角为$\frac{\pi}{4}$.

11.已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,下表给出了 S_n 的部分数据:

n	1	2	3	4	$\cdots$
S_n	t	10	19	$\frac{65}{2}$	$\cdots$

则数列$\{a_n\}$的公比$q=$______，首项$a_1=$______．

【答案】$q=\dfrac{3}{2}$；$a_1=4$．

【解析】本题考查等比数列

由表可得

$a_3=S_3-S_2=9$

$a_4=S_4-S_3=\dfrac{27}{2}$

$$\begin{cases}a_3=a_1q^2=9\\ a_4=a_1q^3=\dfrac{27}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}q=\dfrac{3}{2}\\ a_1=4\end{cases}$$

12.函数$f(x)=|\sin\dfrac{x}{2}-a|$在区间$[0,\pi]$上的最大值为2，则$a=$______．

【答案】-1或2．

【解析】本题考查三角函数和不等式

法一:

$\because x\in[0,\pi]$

$\therefore \dfrac{x}{2}\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

$\therefore \sin\dfrac{x}{2}\in[0,1]$

$\therefore a\le\dfrac{1}{2}$时，$f(x)_{\max}=1-a=2$

$\therefore a=-1$

$\therefore a>\dfrac{1}{2}$时, $f(x)_{max}=|0-a|=|a|=2$

$\because a>\dfrac{1}{2}$

$\therefore a=2$

综上$a=-1$或2.

法二:

$\because x\in[0,\pi]$

$\therefore \dfrac{x}{2}\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

$\therefore \sin\dfrac{x}{2}\in[0,1]$

$\because f(x)=|\sin\dfrac{x}{2}-a|\le 2$恒成立,

$\therefore a-2\le\sin\dfrac{x}{2}\le a+2$在$x\in[0,\pi]$恒成立,

又$\because \sin\dfrac{x}{2}\in[0,1]$,

$\therefore a+2=1$或$a-2=0$

综上$a=-1$或2.

13.能说明“若$f(x)>g(x)$对任意的$x\in[0,2]$都成立,则$f(x)$在$[0,2]$上的最小值大于$g(x)$在$[0,2]$上的最大值”为假命题的一对函数可以是$f(x)=$______, $g(x)=$______.

【答案】$x+1$; x（答案不唯一）

【解析】本题考查命题与简易逻辑

$\because f(x)>g(x)$在$[0,2]$上恒成立;

$\therefore$可先确定$g(x)$,令$g(x)=x$，

$\because f(x)>g(x)$，可令$f(x)=g(x)+1=x+1$,

$\therefore f(x)_{\min}=f(0)=1$.

$g(x)_{\max}=g(2)=2>1$与$f(x)$最小值大于$g(x)$最大值矛盾,符合题意.

14.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x\le a,\\ \dfrac{e}{x}, & x>a.\end{cases}$

（Ⅰ）若函数$f(x)$的最大值为1,则$a=$______;

（Ⅱ）若函数$f(x)$的图象与直线$y=\dfrac{a}{e}$只有一个公共点,则a的取值范围为______.

【答案】e;(0,e].

【解析】本题考查函数的最值与图象.

（Ⅰ）函数$y=\ln x,0<x\le a$,此时单调递增,所以$y_{\max}=\ln a,x=a$.

$y=\dfrac{e}{x},x>a$,此时单调递减,无最大值

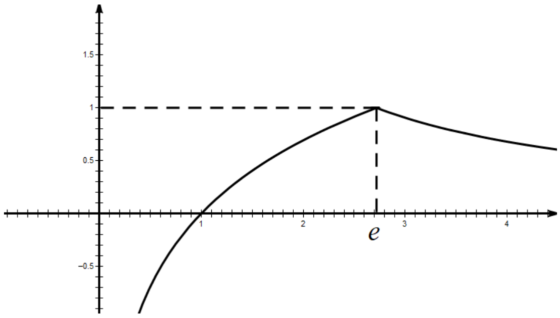
故$f(x)_{\max}=f(a)=\ln a=1,\therefore a=e$.

（Ⅱ）设$g(x)=\ln x-\dfrac{x}{e},\therefore g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-x}{ex}$.

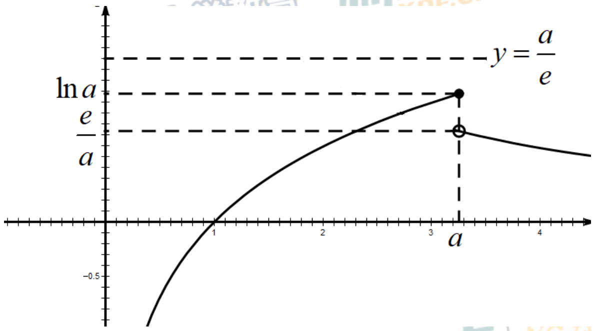
当$0<x<e$时,$g'(x)>0$;当$x>e$时,$g'(x)<0$.

$\therefore g(x)_{\max}=g(e)=0.\therefore g(x)\le g(e)=0$.

①当 $a=\mathrm{e}$ 时,成立.

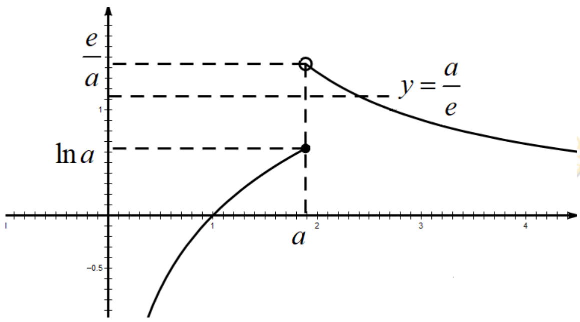


②当 $a>\mathrm{e}$ 时，$\frac{a}{\mathrm{e}}>\frac{\mathrm{e}}{a}$,$\ln a<\frac{a}{\mathrm{e}}$.



此时不成立.

③当 $0<a<\mathrm{e}$ 时，$\frac{a}{\mathrm{e}}<\frac{\mathrm{e}}{a}$,$\ln a<\frac{a}{\mathrm{e}}$.



此时成立.

综上，a 的取值范围为 $(0,\mathrm{e}]$.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15.（本小题 13 分）

设$\{a_n\}$是等比数列,S_n为其前n项的和,且$a_2=2$,$a_1+S_2=0$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式;

（Ⅱ）若$S_n\geq 80$,求n的最小值.

【答案】（Ⅰ）$a_n=-(-2)^{n-1}$,（Ⅱ）n的最小值为 8

【解析】（Ⅰ）$\because \{a_n\}$是等比数列,$a_2=2$,$a_1+S_2=0$,

$\therefore \begin{cases} a_1q=2 \\ a_1+a_1+a_1q=0 \end{cases}$,解得$\begin{cases} a_1=-1 \\ q=-2 \end{cases}$

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=(-1)\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)^{n-1}$

即$a_n=-(-2)^{n-1}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$S_n=\dfrac{(-1)[1-(-2)^n]}{1-(-2)}=\dfrac{(-2)^n-1}{3}$

$\because S_n\geq 80$

$\therefore \dfrac{(-2)^n-1}{3}\geq 80$,$(-2)^n\geq 241$

显然n为奇数时,不等式不成立,

当n为偶数时,即$2^n\geq 241$,解得$n\geq 8$

所以n的最小值为 8.

16.（本小题 13 分）

已知函数$f(x)=2\sin x+\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$.

（Ⅰ）求$f(0)$的值;

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的单调递增区间.

【答案】$1;[0,\frac{\pi}{4}]$

【解析】

（Ⅰ） $f(0)=2\sin 0+\frac{\cos 0}{\sin 0+\cos 0}=0+\frac{1}{0+1}=1$;

（Ⅱ） $f(x)=2\sin x+\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$,

$\therefore \sin x+\cos x\neq 0$,

$\therefore \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\neq 0$,

$\therefore x\neq -\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

即 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq -\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$;

$$
\begin{aligned}
f(x)&=2\sin x+\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}\\
&=2\sin x+\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\\
&=2\sin x+\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\\
&=2\sin x+\cos x-\sin x\\
&=\sin x+\cos x\\
&=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})
\end{aligned}
$$

方法 1：

由正弦函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间 $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 得

$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$

解得 $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+2k\pi$，且 $x\ne-\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$

$\because x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

所以函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的单调递增区间为 $[0,\frac{\pi}{4}]$；

方法 2：

$\because x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\therefore x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$

由正弦函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间 $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 得

$\therefore x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

解得 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$

所以函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的单调递增区间为 $[0,\frac{\pi}{4}]$.

17.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=x^3+x^2+ax-1$.

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时,求函数 $f(x)$ 的单调区间;

（Ⅱ）求证:直线 $y=ax-\frac{23}{27}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线;

（Ⅲ）写出 a 的一个值,使得函数 $f(x)$ 有三个不同的零点（**只需直接写出数值**）.

【解析】

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时, $f(x)=x^3+x^2-x-1$, $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$,

$f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$,

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\frac{1}{3},x_2=-1$,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以, $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,-1)$,$(\frac{1}{3},+\infty)$,单调减区间是 $(-1,\frac{1}{3})$.

（Ⅱ） $f'(x)=3x^2+2x+a$,

设切点为 (x_0,y_0),则 $f'(x_0)=3x_0^2+2x_0+a=a$,

解得 $x_0=0$ 或 $-\frac{2}{3}$,

$f(0)=-1$, $f(-\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}a-\frac{23}{27}$,

点 $(0,-1)$ 不在切线上,舍去;

并且点$(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}a-\frac{23}{27})$在直线$y=ax-\frac{23}{27}$上,

故直线$y=ax-\frac{23}{27}$是曲线$y=f(x)$的切线.

（III） $a=-5$（$a<-1$即可）

18.（本小题 13 分）

在$\triangle ABC$中,$c=7$,$\sin C=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

（Ⅰ）若$\cos B=\frac{5}{7}$,求b的值;

（Ⅱ）若$a+b=11$,求$\triangle ABC$的面积.

【答案】$5;6\sqrt{6}$

【解析】（Ⅰ）在$\triangle ABC$中,由正弦定理得: $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,所以

$b=\frac{\sin B}{\sin C}c$.

因为$B\in(0,\pi)$,且$\cos B=\frac{5}{7}$,所以$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$.

因为$c=7$,$\sin C=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

所以$b=\frac{2\sqrt{6}}{7}\times\frac{5}{2\sqrt{6}}\times 7=5$.

（Ⅱ）因为$\sin C=\frac{2\sqrt{6}}{5}$,所以$\cos C=\pm\sqrt{1-\sin^2 C}=\pm\frac{1}{5}$.

在$\triangle ABC$中,由余弦定理得:

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-2ab(1+\cos C)$.

又因为$c=7,a+b=11$,

①当$\cos C=\frac{1}{5}$时,$7^2=11^2-2ab(1+\frac{1}{5})$,解得$ab=30$.

此时$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 30\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=6\sqrt{6}$.

②当$\cos C=-\frac{1}{5}$时,$7^2=11^2-2ab(1-\frac{1}{5})$,解得$ab=45$.

而方程组$\begin{cases}a+b=11\\ab=45\end{cases}$无解,故舍去.

综上,$S_{\triangle ABC}=6\sqrt{6}$.

19.（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=mx^2-x-\frac{\ln x}{m}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的极值;

（Ⅱ）求证:存在x_0,使得 $f(x_0)<1$.

【解析】

（Ⅰ） $f(x)=mx^2-x-\frac{\ln x}{m}$, $f(x)$ 定义域为$(0,+\infty)$,且$m\neq 0$.

所以 $f'(x)=2mx-1-\frac{1}{mx}=\frac{(2mx+1)(mx-1)}{mx}$.

（1）当$m>0$时,$mx>0,2mx+1>0$, 令 $f'(x)=0$,得$x=\frac{1}{m}$,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 变化情况如下表:

x	$(0,\frac{1}{m})$	$\frac{1}{m}$	$(\frac{1}{m},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以, $f(x)$ 极小值为 $f(\frac{1}{m})=\frac{\ln m}{m}$,无极大值.

（2）当 $m<0$ 时, $mx<0, mx-1<0$, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=-\frac{1}{2m}$,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 变化情况如下表:

x	$(0,-\frac{1}{2m})$	$-\frac{1}{2m}$	$(-\frac{1}{2m},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以, $f(x)$ 极大值为 $f(-\frac{1}{2m})=\frac{3}{4m}+\frac{\ln(-2m)}{m}$, 无极小值.

综上所述, 当 $m>0$, $f(x)$ 极小值为 $f(\frac{1}{m})=\frac{\ln m}{m}$, 无极大值.

当 $m<0$ 时, $f(x)$ 极大值为 $f(-\frac{1}{2m})=\frac{3}{4m}+\frac{\ln(-2m)}{m}$, 无极小值.

（II）

（1）当 $m<0$ 时, $f(1)=m-1<-1<1$,结论成立,

（2）当 $m>0$ 时, $f(x)$ 极小值为 $f(\frac{1}{m})=\frac{\ln m}{m}$

故“存在 x_0,使得 $f(x_0)<1$”等价于“ $f(\frac{1}{m})<1$”

设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$,则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,

令 $g'(x)=0$ 得 $x=e$

当 x 变化时,$g'(x)$,$g(x)$ 变化情况如下表:

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增,在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,

$g(x)_{\max}=g(e)=\dfrac{1}{e}<1$.

所以 $f(\dfrac{1}{m})<1$,

所以 $\forall m\in(0,+\infty)$,存在 $x_0\in(0,+\infty)$,使得 $f(x_0)<1$.

综上所述,存在 x_0,使得 $f(x_0)<1$.

20.（本小题 14 分）

记无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项中最大值为 M_n,最小值为 m_n,令 $b_n=\dfrac{M_n+m_n}{2}$.

（Ⅰ）若 $a_n=2^n-3n$,请写出 b_1,b_2,b_3,b_4 的值;

（Ⅱ）求证:“数列 $\{a_n\}$ 是等差数列”是“数列 $\{b_n\}$ 是等差数列”的充要条件;

（Ⅲ）若 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,$|a_n|<2018$,$|b_n|=1$,求证:存在 $K\in\mathbf{N}^*$,使得 $\forall n\geq K$,有 $b_{n+1}=b_n$.

【解析】

（Ⅰ）$\because a_1=-1,a_2=-2,a_3=-1,a_4=4$

$\therefore b_1=\dfrac{M_n+m_n}{2}=\dfrac{a_1+a_1}{2}=a_1=-1;$

$b_2=\dfrac{M_n+m_n}{2}=\dfrac{a_1+a_2}{2}=-\dfrac{3}{2}$

$b_3=\dfrac{M_n+m_n}{2}=\dfrac{a_1+a_2}{2}=-\dfrac{3}{2}$

$b_4=\dfrac{M_n+m_n}{2}=\dfrac{a_4+a_2}{2}=1$

（Ⅱ）证明：

（必要性）当数列$\{a_n\}$是等差数列时,设其公差为d，

当$d>0$时,$a_n-a_{n-1}=d>0$,所以$a_n>a_{n-1}$,所以$M_n=a_n$， $m_n=a_1$,

当$d<0$时,$a_n-a_{n-1}=d<0$,所以$a_n<a_{n-1}$,所以$M_n=a_1$， $m_n=a_n$,

当$d=0$时,$a_n-a_{n-1}=d=0$,所以$a_n=a_{n-1}$,所以$M_n=a_1$， $m_n=a_n$,

综上,总有$b_n=\dfrac{a_n+a_1}{2}$,

所以$b_n-b_{n-1}=\dfrac{a_n+a_1}{2}-\dfrac{a_{n-1}+a_1}{2}=\dfrac{d}{2}$,所以数列$\{b_n\}$是等差数列;

（充分性）当数列$\{b_n\}$是等差数列时,设其公差为d^*,

因为$b_n-b_{n-1}=\dfrac{M_n+m_n}{2}-\dfrac{M_{n-1}+m_{n-1}}{2}=\dfrac{M_n-M_{n-1}}{2}+\dfrac{m_n-m_{n-1}}{2}=d^*$,

根据M_n,m_n的定义,有以下结论:

$M_n\ge M_{n-1},m_n\le m_{n-1}$,且两个不等式至少有一个取等号,

当$d^*>0$时,则必有$M_n>M_{n-1}$,所以$a_n=M_n>M_{n-1}\ge a_{n-1}$,

所以$\{a_n\}$是一个单调递增数列,所以$M_n=a_n$,$m_n=a_1$,

所以$b_n-b_{n-1}=\dfrac{a_n+a_1}{2}-\dfrac{a_{n-1}+a_1}{2}=\dfrac{a_n-a_{n-1}}{2}=d^*$

所以$a_n-a_{n-1}=2d^*$,即$\{a_n\}$为等差数列

当$d^*<0$时,则必有$m_n<m_{n-1}$,所以$a_n=m_n<m_{n-1}\le a_{n-1}$,

所以$\{a_n\}$是一个单调递减数列,所以$M_n=a_1$,$m_n=a_n$,

所以$b_n-b_{n-1}=\dfrac{a_1+a_n}{2}-\dfrac{a_1+a_{n-1}}{2}=\dfrac{a_n-a_{n-1}}{2}=d^*$

所以$a_n-a_{n-1}=2d^*$,即$\{a_n\}$为等差数列

当$d^*=0$时,

$$b_n-b_{n-1}=\frac{M_n+m_n}{2}-\frac{M_{n-1}+m_{n-1}}{2}=\frac{M_n-M_{n-1}}{2}+\frac{m_n-m_{n-1}}{2}=0$$

因为M_n-M_{n-1},m_n-m_{n-1}中必有一个为0,

根据上式,一个为0,则另一个亦为0,

所以$M_n=M_{n-1}$,$m_n=m_{n-1}$,所以$\{a_n\}$为常数数列,所以$\{a_n\}$为等差数列,

综上,结论得证.

（III）假设结论不成立.

因为$|b_n|=1$,即$b_n=1$,或者$b_n=-1$,

所以$\forall K\in\mathbf{N}^*$,一定$\exists i\ge K$,使得b_i,b_{i+1}符号相反

所以在数列$\{b_n\}$中存在$b_{k_1},b_{k_2},b_{k_3},\cdots,b_{k_i},b_{k_{i+1}}\cdots$,其中

$k_1<k_2<k_3<\cdots<k_i<\cdots$

且 $-1=b_{k_1}=b_{k_2}=b_{k_3}=\cdots=b_{k_i}=b_{k_{i+1}}\cdots$,

$1=b_{k_1+1}=b_{k_2+1}=b_{k_3+1}=\cdots=b_{k_i+1}=b_{k_{i+1}+1}\cdots$,

因为 $b_{k_i}=-1, b_{k_i+1}=1$,即 $\dfrac{M_{k_i}+m_{k_i}}{2}=-1, \dfrac{M_{k_i+1}+m_{k_i+1}}{2}=1$

注意到 $M_{k_i+1}\ge M_{k_i}, m_{k_i+1}\le m_{k_i}$,且有且仅有一个等号成立,

所以必有 $M_{k_i+1}>M_{k_i}, m_{k_i+1}=m_{k_i}$

所以 $M_{k_i+1}=M_{k_i}+4$,所以 $a_{k_i+1}=M_{k_i+1}=M_{k_i}+4$

因为 $k_i>k_{i-1}$,所以 $k_i\ge k_{i-1}+1$,所以 $M_{k_i}\ge M_{k_{i-1}+1}$

所以 $a_{k_i+1}=M_{k_i}+4\ge M_{k_{i-1}+1}+4$

所以 $a_{k_i+1}\ge a_{k_{i-1}+1}+4$

所以 $a_{k_i+1}-a_{k_{i-1}+1}\ge 4$

所以 $a_{k_2+1}-a_{k_1+1}\ge 4$

$a_{k_3+1}-a_{k_2+1}\ge 4$

$a_{k_4+1}-a_{k_3+1}\ge 4$

$\cdots$

$a_{k_m+1}-a_{k_{m-1}+1}\ge 4$

所以 $a_{k_m+1}-a_{k_1+1}\ge 4(m-1)$

所以 $a_{k_m+1}\ge a_{k_1+1}+4(m-1)$

所以 $a_{k_{1010}+1}\ge a_{k_1+1}+4(1010-1)>-2018+4036=2018$,

这与 $|a_n|<2018$ 矛盾,所以假设错误,

所以 $\exists K\in\mathbf{N}^*$,使得 $\forall n\ge K$,有 $b_{n+1}=b_n$.