2020年高考全国甲卷数学（理）逐题解析

一、选择题（本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．已知集合$U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，$A=\{-1,0,1\}$，$B=\{1,2\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$（ ）

A. $\{-2,3\}$　　B. $\{-2,2,3\}$　　C. $\{-2,-1,0,3\}$　　D. $\{-2,-1,0,2,3\}$

【答案】A

【解析】

由题意得：$A\cup B=\{-1,0,1,2\}$，

$\therefore \complement_U(A\cup B)=\{-2,3\}$，

$\therefore$选A

2．若α为第四象限角，则（　）

A. $\cos 2\alpha>0$　　B. $\cos 2\alpha<0$　　C. $\sin 2\alpha>0$　　D. $\sin 2\alpha<0$

【答案】D

【解析】

$\because \alpha$为第四象限角，

$\therefore \sin\alpha<0,\cos\alpha>0,$

$\therefore \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$，无法判断，

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha<0,$

$\therefore$选D

3．在新冠肺炎疫情防控期间，某超市开通网上销售业务，每天能完成1200份订单的配货，由于订单量大幅增加，导致订单积压。为解决困难，许多志愿者踊跃报名参加配

货工作。已知该超市某日积压500份订单未配货，预计第二天的新订单超过1600份的概率为0.05。志愿者每人每天能完成50份订单的配货，为使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于0.95，则至少需要志愿者（　　）

A.10名　　B.18名　　C.24名　　D.32名

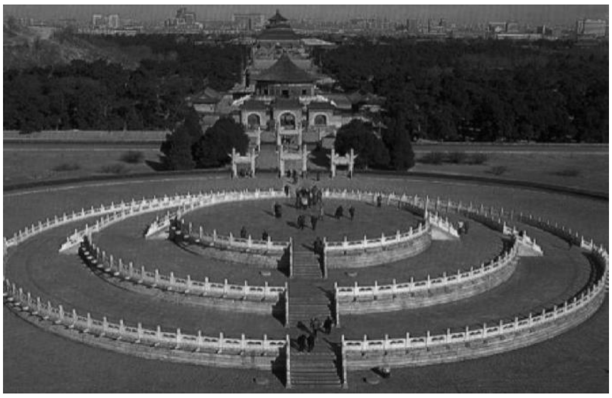
【答案】B

【解析】

根据当日订单的配货的概率不小于0.95，可知当日订单超过1600份，则要想第二天完成积压及当日订单，需要当天配送$1600+500=2100$份，正常完成1200份，则志愿者需要完成$2100-1200=900$份，则需要志愿者人数为$\frac{900}{50}=18$人.

$\therefore$选B

4. 若北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层，上层中心有一块圆形石板（称为天心石），环绕天心石砌9块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加9块。下一层的第一环比上一层的最后一环多9层，向外每环依次也增加9块，已知每层环数相同，且下层比中层多729块，则三层共有扇形面形石板（不含天心石）（ ）



A.36699块　　B.3474块

C.3402块　　D.3339块

【答案】C

【解析】

由题意知，上、中、下的扇形石板数构成一个等差数列且$a_n=9n$。

设每层都有x环，

上层 $a_1=9$ $a_2=18$ $a_3=27$ …… $a_x=9x$

中层 $a_{x+1}=9(x+1)$ $a_{x+2}=9(x+2)$ $a_{x+3}=9(x+3)$ … $a_{x+x}=a_{2x}=9\cdot 2x$

下层 $a_{2x+1}=9(2x+1)$ $a_{2x+2}=9(2x+2)$ $a_{2x+3}=9(2x+3)$ … $a_{2x+x}=a_{3x}=9\cdot 3x$

$\because$ 下层-中层=729

即 $(a_{2x+1}-a_{x+1})+(a_{2x+2}-a_{x+2})+(a_{2x+3}-a_{x+3})+\ldots+(a_{3x}-a_{2x})=9x\cdot x=9x^2=729$

解得：$x=9$

$\therefore$ 每层都有 9 环

三层共 9×3=27（环）

$\therefore S_{27}=\dfrac{27\times(9+9\times 27)}{2}=3402$

$\therefore$ 选 C

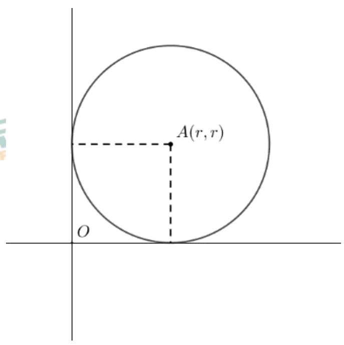
5. 若过点 $(2,1)$ 的圆与两坐标轴都相切，则圆心到直线 $2x-y-3=0$ 的距离为

（ ）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ D. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】



点 $(2,1)$ 在第一象限，则依题意可画出该圆

在直角坐标系中图形如右图

由图，可圆心可设为 (r,r)

则该圆的方程为 $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

将点 $(2,1)$ 代入可得

$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$

$r^2-6r+5=0$

$(r-5)(r-1)=0$

解得$r_1=5$，$r_2=1$

①当$r=5$时，圆心为$(5,5)$

$$d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$=\frac{|2\times5-5-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

②当$r=1$时，圆心为$(1,1)$

$$d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$=\frac{|2\times1-1-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

综上，$d=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore$选 B

6. 数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{m+n}=a_ma_n$，若$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=2^{15}-2^5$，则$k=$

（　）

A. 2　　B.3　　C. 4　　D.5

【答案】C

【解析】

当$n=1$时，有$a_{m+1}=a_m a_1$

$\therefore \dfrac{a_{m+1}}{a_m}=a_1=2$

$\therefore$数列$\{a_n\}$是首项为2，公比为2的等比数列

$\therefore \dfrac{a_{k+1}\left(1-q^{10}\right)}{1-q}=2^{15}-2^5$

$\therefore \dfrac{2^{k+1}\left(1-2^{10}\right)}{1-2}=2^{15}-2^5$

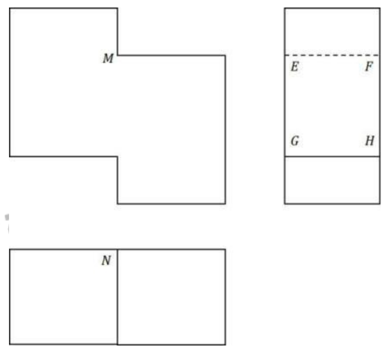
$\therefore \left(2^{10}-1\right)2^{k+1}=\left(2^{10}-1\right)2^5$

$\therefore k+1=5$

解得$k=4$，

$\therefore$选 C

7. 如图是一个多面体的三视图，这个多面体某条棱的一个端点在正视图中对应的点为M，在俯视图中对应的点为N，则该端点在侧视图中对应的点为（　）



A. E

B. F

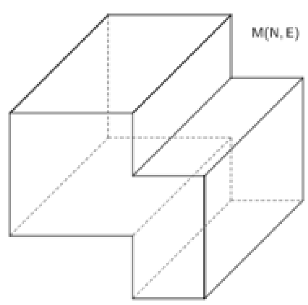
C. G

D. H

【答案】A

【解析】

题中三视图的立体图如右图所示，由图可知该端点在侧视图中对应的点为点E，



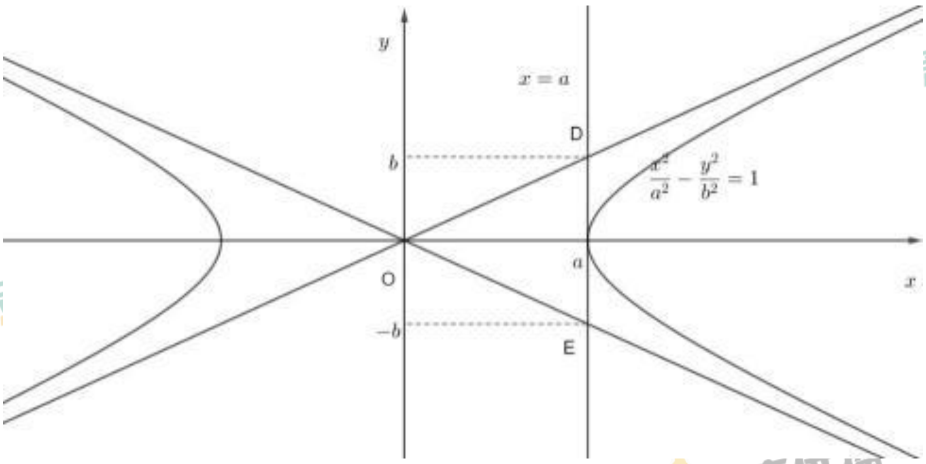
$\therefore$选 A

8. 设O为坐标原点，直线$x=a$与双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线分别

交于 D,E 两点，若△ODE 的面积为8，则 C 的焦距的最小值为（　）

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

【答案】B



【解析】

双曲线 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1(a>0,b>0)$ 渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x,\because a>0$，则 $x=a$ 与双曲线渐近线交点坐标为 $D(a,b)$ 和 $E(a,-b)$，则 $S_{\triangle ODE}=\frac{1}{2}.a.2b=ab=8$，由 $c^2=a^2+b^2\geq 2ab=16$，得 $c\geq 4$，即焦距的最小值为 $2c$ 为 8。

$\therefore$ 选 B

9. 设函数 $f(x)=\ln|2x+1|-\ln|2x-1|$，则 $f(x)$（　）

A. 是偶函数，且在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 单调递增　B. 是奇函数，且在 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 单调递减

C. 是偶函数，且在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 单调递增　D. 是奇函数，且在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 单调递减

【答案】D

【解析】

函数定义域为 $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$，$f(-x)=\ln|-2x+1|-\ln|-2x-1|$

$=\ln|2x-1|-\ln|2x+1|=-f(x)$，即 $f(x)$ 为奇函数

当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时, $f(x)=\ln(2x+1)-\ln(1-2x)$

$f'(x)=\frac{2}{2x+1}-\frac{-2}{1-2x}=\frac{4}{1-4x^2}$

此时 $1-4x^2\in(0,1)$　$f'(x)>0$，　$f(x)$ 单调递增。

当 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ 时，　$f(x)=\ln(2x+1)-\ln(2x-1)$

$f'(x)=\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{2x-1}=\frac{4}{1-4x^2}$，

此时 $1-4x^2\in(-\infty,0)$，　$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减。

故 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上递增，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递减。

又由于 $f(x)$ 是奇函数 故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 上递减，在 $(-\frac{1}{2},0)$ 上递增

综述：　$f(x)$ 是奇函数，在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 上递减，$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 上递增，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上递减。

$\therefore$ 选 D

10. 已知△ABC是面积为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ 的等边三角形，且其顶点都在球 O 的球面上，若球 O 的表面积为 16π，则 O 到平面 ABC 的距离为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　　B. $\frac{3}{2}$　　　C. 1　　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

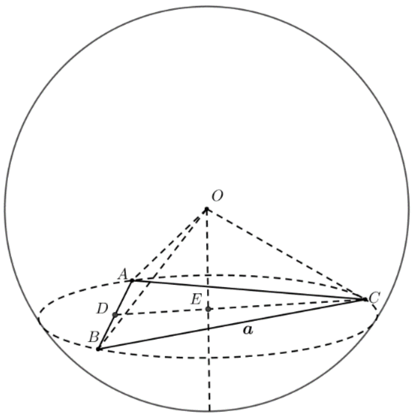
【答案】C

【解析】

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$　$\therefore a=3$　$CD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$　故 $CE=\frac{2}{3}CD=\sqrt{3}$

$\therefore S_{球}=4\pi r^2=16\pi$　$\therefore r=OC=2$　$\therefore OE=\sqrt{OC^2-CE^2}=\sqrt{4-3}=1$

$\therefore$ 选 C



11．若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，则（ ）

A．$\ln(y-x+1)>0$　　B．$\ln(y-x+1)<0$

C．$\ln|x-y|>0$　　D．$\ln|x-y|<0$

【答案】A

【解析】

解：$\because 2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$

移项得 $2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$

令 $f(x)=2^x-3^{-x}$

$\because y=2^x$ 和 $y=-3^{-x}$ 在 R 上单调递增

可得 $x<y$

$\therefore y-x>0$

$\therefore y-x+1>1$

$\therefore \ln(y-x+1)>0$

$\therefore$ 选 A

12．$0-1$ 周期序列在通信技术中有着重要应用。若序列 $a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 满足 $a_i\in\{0,1\}\ (i=1,2,\cdots)$，且存在正整数 m，使得 $a_{i+m}=a_i\ \ (i=1,2,\cdots)$ 成立，则称其为 $0-1$ 周期序列，并称满足 $a_{i+m}=a_i(i=1,2,\cdots)$ 的最小正整数 m 为这个序列的周期。对于周期为 m 的 $0-1$ 序列

$a_1a_2\cdots a_n\cdots$，$C(k)=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}a_ia_{i+k}(k=1,2,\cdots,m-1)$是描述其性质的重要指标。下列周期为 5 的$0-1$序列中，满足$C(k)\le\dfrac{1}{5}(k=1,2,3,4)$的序列是（　　）

A.11010⋯　　B.11011⋯　　C.10001⋯　　D.11001⋯

【答案】C

【解析】

A．$C(1)=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}=\dfrac{1}{5}(1+0+0+0+0)=\dfrac{1}{5}$

$C(2)=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}a_ia_{i+2}=\dfrac{1}{5}(0+1+0+1+0)=\dfrac{2}{5}$　　A 不满足

B．$C(1)=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}=\dfrac{1}{5}(1+0+0+1+1)=\dfrac{3}{5}$　　B 不满足

C．$C(1)=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}=\dfrac{1}{5}(0+0+0+0+1)=\dfrac{1}{5}$

$C(2)=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}a_ia_{i+2}=\dfrac{1}{5}(0+0+0+0+0)=0$

同理可验证，$C(3)=0$，$C(4)=\dfrac{1}{5}$，⋯　　C 满足

D．$C(1)=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}=\dfrac{1}{5}(1+0+0+0+1)=\dfrac{2}{5}$　　D 不满足

$\therefore$选 C

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．已知单位向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角为45°，$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$垂直，则$k=$ _____.

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

已知$\vec{a}$，$\vec{b}$为单位向量夹角为45°

$\therefore |\vec{a}|=1\quad |\vec{b}|=1$

又$\because k\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}$垂直

$\therefore (k\vec{a}-\vec{b})\vec{a}=0$

$k|\vec{a}|^2-|\vec{a}||\vec{b}|\cos 45^{\circ}=0$

$k-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$

$\therefore k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

14. 4 名同学到 3 个小区参加垃圾分类宣传活动，每名同学只去 1 个小区，每个小区至少安排 1 名同学，则不同的安排方法共有_____种

【答案】36 种

【解析】

解：3 个小区中有一个小区安排 2 名同学，其它 2 个小区都是安排 1 名同学，因此从 3 个小区中选 1 个小区C_3^1

为这个小区安排 2 名同学，4 名同学中选 2 名C_4^2

剩余 2 人，2 个小区全排列A_2^2

共 $C_3^1\cdot C_4^2\cdot A_2^2=36$

故答案为 36

15. 设复数Z_1, Z_2满足$|Z_1|=|Z_2|=2$，$Z_1+Z_2=\sqrt{3}+i$，则$|Z_1-Z_2|=$

【答案】$2\sqrt{3}$

【解析】

设$Z_1=a_1+b_1i$

$Z_2=a_2+b_2i$

$\because |Z_1|=|Z_2|=2$

$\therefore \begin{cases}\sqrt{a_1^2+b_1^2}=2\\ \sqrt{a_2^2+b_2^2}=2\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}a_1^2+b_1^2=4\\ a_2^2+b_2^2=4\end{cases}$

$\because Z_1+Z_2=\sqrt{3}+i$

$\therefore \begin{cases}a_1+a_2=\sqrt{3}\\ b_1+b_2=1\end{cases}$

$(a_1+a_2)^2=3$

$(1)a_1^2+a_2^2+2a_1a_2=3$

$(b_1+b_2)^2=1$

$(2)b_1^2+b_2^2+2b_1b_2=1$

由(1)+(2)得$a_1^2+a_2^2+2a_1a_2+b_1^2+b_2^2+2b_1b_2=4$

得$a_1a_2+b_1b_2=-2$

$|Z_1-Z_2|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$

$=\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2+b_1^2+b_2^2-2b_1b_2}$

$=2\sqrt{3}$

16. 设有下列四个命题：

p_1：两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内.

p_2：过空间中任意三点有且仅有一个平面.

p_3：若空间两条直线不相交，则两条直线平行.

p_4：若直线$l\subset$平面α，直线$m\perp$平面α，则$m\perp l$.

则下述命题中所有真命题的序号是_____.

① $p_1\wedge p_4$　② $p_1\wedge p_2$　③ $\neg p_2\vee p_3$　④ $\neg p_3\vee \neg p_4$

【答案】①③④

【解析】

p_1对，设三条直线为l_1,l_2,l_3，不妨设l_1,l_2相交于点A，且l_1,l_2在同一个平面α上，又l_3与l_1,l_2都相交，不妨设交点分别为B,C，则B,C在平面α上，故l_3在平面α上，则l_1,l_2,l_3在同一个平面上.

p_2错，若三点在同一条线上，则经过该三点有无数个平面

p_3错，异面直线.

p_4对，$m\perp$平面α，且$l\subset$平面α，则$m\perp l$.

则①③④是真命题

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. $\triangle ABC$中，$\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C=\sin B\sin C$.

（1）求A；

（2）若$BC=3$，求$\triangle ABC$周长的最大值.

【答案】

（1）$A=120°$

（2）$\triangle ABC$周长的最大值为$3+2\sqrt{3}$

【解析】

（1）$\because \sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C=\sin B\sin C$

设$\triangle ABC$三边分别为a,b,c

由正弦定理可得

$a^2-b^2-c^2=bc$

$\therefore \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore$由余弦定理得$\cos A=-\dfrac{1}{2}$

$\because A$为$\triangle ABC$的内角，则$A=120^\circ$

（2）令周长$l=a+b+c$

$\because BC=3 \therefore a=3$

$\therefore b^2+c^2+bc=9$

$\therefore (b+c)^2=9+bc\le 9+\dfrac{(b+c)^2}{4}$

$\therefore \dfrac{3}{4}(b+c)^2\le 9$

$\therefore (b+c)^2\le 12$

$\therefore b+c\le 2\sqrt{3}$

$\therefore l=a+b+c\le 3+2\sqrt{3}$

当$b=c=\sqrt{3}$时，等号成立

$\therefore$周长的最大值为$3+2\sqrt{3}$

18. 某沙漠地区经过治理，生态系统得到很大改善，野生动物数量有所增加，为调查该地区某种野生动物的数量，将其分成面积相近的200个地块，从这些地块中用简单随机抽样的方法抽取20个作为样区，调查得到样本数据(x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,20)$，其中x_i和y_i分别表示第i个样区的植物覆盖面积（单位：公顷）和这种野生动物的数量，并计算得$\sum\limits_{i=1}^{20}x_i=60$，$\sum\limits_{y=1}^{20}y_i=1200$，$\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=80$，$\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2=9000$，$\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=800$.

（1）求该地区这种野生动物数量的估计值（这种野生动物数量的估计值等于样区这种野生动物数量的平均数乘以地块数）；

（2）求样本$(x_i,y_i)$$(i=1,2,...,20)$的相关系数（精确到0.01）；

（3）根据现有统计资料，各地块间植物覆盖面积差异很大，为提高样本的代表性以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计，请给出一种你认为更合理的抽样方法。并说明理由.

附：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，$\sqrt{2}\approx 1.414$.

【答案】

（1）12000

（2）0.94

（3）分层抽样

【解析】

（1）由样区这种野生生物数量的平均数为：$\overline{y}=\dfrac{1}{20}\sum\limits_{i=1}^{20}y_i=60$

所以该地区这种野生生物数量的估计值为：$200\overline{y}=12000$

（2）$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{800}{\sqrt{80\times 9000}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\approx 0.94$

（3）分层抽样的方法，由（2）知植物覆盖面积与野生动物数量相关性很强。因为植物覆盖面积差异很大，会导致野生动物活动范围存在大的差异，因此为了提高样本的代表性，要采取分层抽样的抽样方法。

19. 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点 F 与抛物线 C_2 的焦点重合，C_1 的中心与 C_2 的顶点重合，过 F 且与 x 轴垂直的直线交 C_1 于 A，B 两点，交 C_2 于 C，D 两点，且 $|CD|=\dfrac{4}{3}|AB|$.

（1）求 C_1 的离心率；

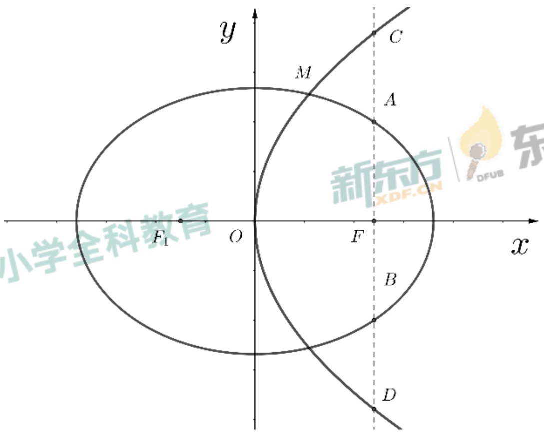
（2）设 M 是 C_1 与 C_2 的公共点，若 $|MF|=5$，求 C_1 与 C_2 的标准方程.

【答案】

（1）C_1 的离心率为 $\frac{1}{2}$

（2）C_1：$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ C_2：$y^2=12x$

【解析】



（1）右焦点 $F(c,0)\ (c>0)$，设抛物线方程为 $y^2=2px\ (p>0)$，则抛物线的焦点为 $(\frac{p}{2},0)$

$\therefore \frac{p}{2}=c$，$p=2c$

$\therefore$ 抛物线方程为：$y^2=4cx$ ①

C、D 点横坐标为 c，带入①：

$y^2=4c^2$，$y=\pm 2c$

$\therefore C(c,2c)\ \ D(c,-2c)$

$|CD|=4c$

$\therefore |AB|=\frac{3}{4}|CD|=3c$

$\therefore A(c,\frac{3}{2}c)\ \ B(c,-\frac{3}{2}c)$

C_1的另一个焦点坐标为$F_1(-c,0)$

$AF_1=\sqrt{(\frac{3}{2}c)^2+(2c)^2}=\frac{5}{2}c$

$AF=\frac{3}{2}c$

$\therefore 2a=\frac{5}{2}c+\frac{3}{2}c=4c$

$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

（2）对于C_1： $e=\frac{1}{2}$

$\therefore a=2c$, $b=\sqrt{3}c$

C_1： $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$ ②

C_2： $y^2=4cx$ ③

将③代入②：

$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{4cx}{3c^2}=1$

$3x^2+16cx-12c^2=0$

$x_1=\frac{2}{3}c$, $x_2=-6c$ ($x>0$, 舍去)

$\therefore M$ 纵坐标满足： $y^2=4c\cdot\frac{2}{3}c=\frac{8}{3}c^2$

$\therefore y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}c$

$\therefore M(\frac{2}{3}c,\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}c)$ $F(c,0)$

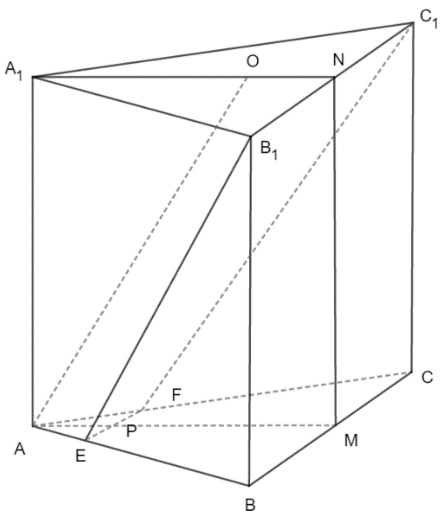
$|MF|=\sqrt{(\frac{1}{3}c)^2+(\frac{2\sqrt{6}}{3}c)^2}=\frac{5}{3}c=5$

$\therefore c=3$

C_1： $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$

C_2： $y^2=12x$

20. 如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，侧面 BB_1C_1C 是矩形，M,N 分别为 BC,B_1C_1 的中点，P 为 AM 上一点，过 B_1C_1 和 P 的平面交 AB 于 E，交 AC 于 F．



（1）证明：$AA_1//MN$，且平面 $A_1AMN\perp$ 平面 EB_1C_1F；

（2）设 O 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心，若 $AO//$ 平面 EB_1C_1F，且 $AO=AB$，求直线 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角的正弦值．

【答案】

（1）见解析；

（2）$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】

（1）$\because M$、N 为矩形 B_1BCC_1 中 BC、B_1C_1 中点

$\therefore MN//BB_1$

又 $\because$ 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1//BB_1$

$\therefore MN//AA_1$

又 $\because N$ 为 B_1C_1 中点，$\triangle A_1B_1C_1$ 为正三角形

$\therefore A_1N\perp B_1C_1$

又 $\because B_1C_1\perp B_1B$

$\therefore B_1C_1\perp AA_1$

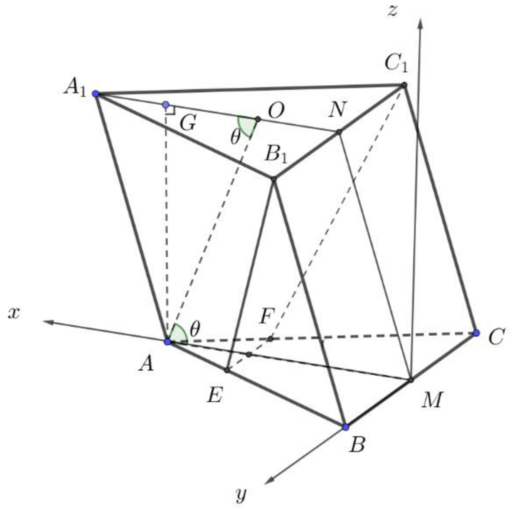
$\because AA_1$、A_1N 为平面 AA_1NM 中两相交直线

$\therefore B_1C_1\perp$ 平面 AA_1NM

又$\because B_1C_1 \subset$平面B_1C_1FE

$\therefore$平面$A_1AMN \perp$平面EB_1C_1F

（2）设$AB=2$，如图建立空间直角坐标系



$\because AO//$平面$EFC_1B_1, AO\subset$平面$AOPN$

平面$EFC_1B_1\cap$平面$AOPN=PN$

$\therefore AO//PN$

又$\because AP//ON, \therefore$四边形$APON$为平行四边形

$\therefore AP=ON, AO=PN$

设$\angle OAP=\theta$，过 A 作$AG\perp A_1N$，交A_1N于点G

$\because AO=AB=2$，则三棱柱的高

$AG=2\sin\theta$，$GO=2\cos\theta$

$$\therefore GA_1=AO-GO=\frac{2}{\sqrt{3}}-2\cos\theta$$

由此可得：

$B(0,1,0)$，$C(0,-1,0)$，$B_1(\frac{2}{\sqrt{3}}-2\cos\theta,1,2\sin\theta)$，$E(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{3},0)$

$$\therefore \overrightarrow{EB_1}=(-2\cos\theta,\frac{2}{3},2\sin\theta),\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$$

$$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{EB_1},\overrightarrow{CB}\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{EB_1}\right|}\right|=\left|\frac{\frac{4}{3}}{2\cdot\sqrt{4\cos^2\theta+4\sin^2\theta+(\frac{2}{3})^2}}\right|=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$\because$由（1）知$\overrightarrow{CB}$是平面AA_1MN的法向量

$\therefore EB_1$与CB夹角和EB_1与平面AA_1MN夹角α互余

$$\therefore \sin\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{EB_1},\overrightarrow{CB}\right\rangle\right|=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

即直线B_1E与平面A_1AMN所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$

21．已知函数 $f(x)=\sin^2 x\cdot\sin 2x$．

（1）讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 的单调性；

（2）证明：$|f(x)|\le\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$；

（3）设 $n\in N^*$，证明：$\sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\cdots\sin^2 2^n x\le\dfrac{3^n}{4^n}$．

【答案】

（1）$f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{3})$ 上单调递增，在区间 $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$ 上单调递减，在区间 $(\dfrac{2\pi}{3},\pi)$ 上单调递增

（2）见解析

（3）见解析

【解析】

（1）$f(x)=\sin^2 x\cdot\sin 2x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\sin 2x=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x\sin 2x=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{4}\sin 4x$

$f'(x)=\cos 2x-\cos 4x=-(2\cos 2x+1)(\cos 2x-1)$

$\because \cos 2x\in[-1,1]$

$\therefore \cos 2x-1\le 0$

令 $f'(x)\ge 0$，得 $x\in(0,\dfrac{\pi}{3})\cup(\dfrac{2\pi}{3},\pi)$

令 $f'(x)<0$，得 $x\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{3})$ 上单调递增，在区间 $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$ 上单调递减，在区间 $(\dfrac{2\pi}{3},\pi)$ 上单调递增

（2）由（1）知，$f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{4}\sin 4x$，$f(x)$ 周期为 π

$\because f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{8}$， $f(\pi)=0$

$\therefore f(x)_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$\because f(\frac{2\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$， $f(0)=0$

$\therefore f(x)_{\min}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$\therefore f(x)\in[-\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{3\sqrt{3}}{8}]$

$\therefore |f(x)|\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

（3）由（2）知，$|\sin^2 x\sin 2x|\le\frac{3\sqrt{3}}{8}=(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}$

则，$|\sin^2 2x\sin 2^2 x|\le\frac{3\sqrt{3}}{8}=(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}$

$|\sin^2 2^2 x\sin 2^4 x|\le\frac{3\sqrt{3}}{8}=(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}$

$\cdots$

$|\sin^2 2^{n-1} x\sin 2^n x|\le\frac{3\sqrt{3}}{8}=(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}$

$\therefore |\sin^2 x\sin 2x\cdot\sin^2 2x\sin 2^2 x\cdots\sin^2 2^{n-1}x\sin 2^n x|\le(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}n}$

即，$|\sin^2 x\sin^3 2x\sin^3 2^2 x\cdots\sin^3 2^{n-1}x\sin 2^n x|\le(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}n}$

$|\sin^3 x\cdot\sin^3 2x\cdots\sin^3 2^n x|=|\sin x(\sin^2 x\sin^3 2x\sin^3 2^2 x\cdots\sin^3 2^{n-1}x\sin 2^n x)\cdot\sin^2 2^n x|\le(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}n}$

$\therefore \sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\cdots\sin^2 2^n x\le(\frac{3}{4})^{\frac{n}{2}\cdot 2}\le\frac{3^n}{4^n}$

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所

做的第一题计分。

22. [选修 4-4：极坐标与参数方程]

已知曲线C_1，C_2的参数方程分别为

$$C_1:\begin{cases}x=4\cos^2\theta,\\ y=4\sin^2\theta\end{cases}(\theta为参数)，C_2:\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t},\\ y=t-\dfrac{1}{t}\end{cases}(t为参数).$$

（1）将C_1，C_2的参数方程化为普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系.设C_1，C_2的焦点为P，求圆心在极轴上，且经过极点和P的圆的极坐标方程.

【答案】

（1）C_1的直角坐标方程为：$x+y-4=0(0\le x\le 4)$

C_2的直角坐标方程为$x^2-y^2=4(x\le -2或x\ge 2)$

（2）圆的极坐标方程为：$\rho=\dfrac{17}{5}\cos\theta$

【解析】

（1）$\because C_1:\begin{cases}x=4\cos^2\theta\\ y=4\sin^2\theta\end{cases}, \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\therefore C_1$的直角坐标方程为：$x+y=4$

$\because x=4\cos^2\theta \qquad 0\le\cos^2\theta\le 1$

$\therefore 0\le x\le 4$

$\therefore C_1$的直角坐标方程为：$x+y-4=0(0\le x\le 4)$

$\because C_2:\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t}\\ y=t-\dfrac{1}{t}\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}+2 & ①\\ y^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}-2 & ②\end{cases}$

①−②得$x^2-y^2=4$

$\because x=t+\dfrac{1}{t}$

当$t>0$时，$x\geq 2$

当$t<0$时，$x\leq -2$

$\therefore C_2$的直角坐标方程为$x^2-y^2=4\left(x\leq -2\text{或}x\geq 2\right)$

综上：C_1的直角坐标方程为：$x+y-4=0\left(0\leq x\leq 4\right)$

C_2的直角坐标方程为$x^2-y^2=4\left(x\leq -2\text{或}x\geq 2\right)$

（2）C_1与C_2交点P:$\begin{cases}x+y-4=0\\x^2-y^2=4\end{cases}$得$\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

$\therefore P$点坐标为$\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

设经过极点与P的圆的圆心坐标为$(a,0)$

$\therefore a^2=\left(a-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

$\therefore a=\dfrac{17}{10}$

$\therefore$圆的直角坐标方程为:$\left(x-\dfrac{17}{10}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{17}{10}\right)^2$

$\therefore x^2+y^2-\dfrac{17}{5}x=0$

$\because\begin{cases}x^2+y^2=\rho^2\\x=\rho\cos\theta\end{cases}$

$\therefore$圆的极坐标方程为:$\rho=\dfrac{17}{5}\cos\theta$

综上：圆的极坐标方程为:$\rho=\dfrac{17}{5}\cos\theta$

23. [选修 4-5：不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|x-a^2|+|x-2a+1|$.

（1）当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\geq 4$ 的解集；

（2）若 $f(x)\geq 4$, 求 a 的取值范围.

【答案】

（1）不等式 $f(x)\geq 4$ 的解集为 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{11}{2},+\infty\right)$

（2）a 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

【解析】

解:(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=|x-4|+|x-3|$

①当 $x\leq 3$ 时，$f(x)=4-x+3-x=7-2x$

②当 $3<x\leq 4$ 时，$f(x)=4-x+x-3=1$

③当 $x>4$ 时，$f(x)=x-4+x-3=2x-7$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}7-2x,x\leq 3\\1,3<x\leq 4\\2x-7,x>4\end{cases}$$

又 $\because f(x)\geq 4$

即①当 $x\leq 3$ 时, $7-2x\geq 4$

$\therefore x\leq \frac{3}{2}$

②当 $3<x\leq 4$ 时, $1\geq 4$（舍去）

③当 $x>4$ 时, $2x-7\geq 4$

$\therefore x\geq \frac{11}{2}$

综上，不等式 $f(x)\geq 4$ 的解集为 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{11}{2},+\infty\right)$

(2) $|x-a^2|+|x-2a+1|\geq |x-a^2-(x-2a+1)|=|a^2-2a+1|=(a-1)^2$

$\because f(x)\geq 4$

$\therefore (a-1)^2\geq 4$

$\therefore a\geq 3$ 或 $a\leq -1$

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$