2020 年高考全国甲卷数学（文）逐题解析

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{x||x|<3,x\in Z\},B=\{x||x|>1,x\in Z\}$, 则 $A\cap B=$（ ）

A. $\varnothing$　　B. $\{-3,-2,2,3\}$　　C. $\{-2,0,2\}$　　D. $\{-2,2\}$

【答案】D

【解析】

$\because A=\{x||x|<3,x\in Z\}=\{-3<x<3,x\in Z\}$, $B=\{x||x|>1,x\in Z\}=\{x<-1$或$x>1,x\in Z\}$

$\therefore A\cap B=\{-2,2\}$

$\therefore$选 D

2. $(1-i)^4=$ （ ）

A. -4　　B. 4　　C. $-4i$　　D. $4i$

【答案】A

【解析】

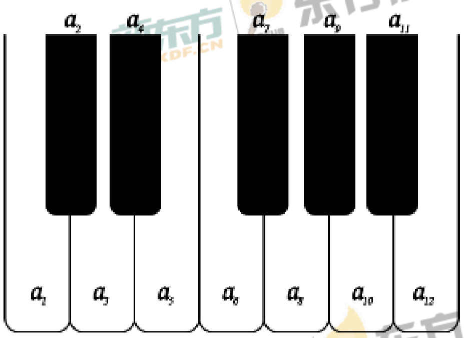
$\because (1-i)^4=\left((1\text{-}i)^2\right)^2$，

$\because (1\text{-}i)^2=\text{-}2i$

$\therefore \left((1-i)^2\right)=4i^2=-4$

$\therefore$选 A

3．如图，将钢琴上的12个键依次记为$a_1,a_2,\ldots,a_{12}$.设$1\le i<j<k\le 12$.若$k-j=3$且$j-i=4$，则称a_i,a_j,a_k为原位大三和弦；若$k-j=4$且$j-i=3$，则称a_i,a_j,a_k为原位小三和弦.用这12个键可以构成的原位大三和弦与原位小三和弦的个数之和为（ ）



A.5　　B.8　　C.10　　D.15

【答案】C

【解析】

由题意知$1\le i<j<k\le 12$

若满足$k-j=3$，且$j-i=4$，a_i,a_j,a_k为原位大三和弦，其情况如下：

i	j	k
1	5	8
2	6	9
3	7	10
4	8	11
5	9	12

共五种情况；同理，若满足$k-j=4$且$j-i=3$，称之为原位小三和弦，其情况如下：

i	j	k
1	4	8
2	5	9
3	6	10
4	7	11
5	8	12

共五种情况.综上所述共十种情况.

$\therefore$选 C

4．在新冠肺炎疫情防控期间，某超市开通网上销售业务，每天能完成1200份订单的

配货，由于订单量大幅增加，导致订单积压.为解决困难，许多志愿者踊跃报名参加配货工作.已知该超市某日积压500份订单未配货，预计第二天的新订单超过1600份的概率为0.05.志愿者每人每天能完成50份订单的配货，为使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于0.95，则至少需要志愿者（　　）

A.10名　　B.18名　　C.24名　　D.32名

【答案】B

【解析】

当日订单的配货的概率不小于0.95，可知当日订单最多超过1600份，则要想完成积压及当日订单，需要当天配送$1600+500=2100$份，正常完成1200份，则志愿者需要完成$2100-1200=900$份，则需要志愿者人数为$\frac{900}{50}=18$人.

$\therefore$选B

5.已知单位向量$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$的夹角为60°，则在下列向量中，与$\mathbf{b}$垂直的是（　　）

A.$\mathbf{a}+2\mathbf{b}$　　B.$2\mathbf{a}+\mathbf{b}$　　C.$\mathbf{a}-2\mathbf{b}$　　D.$2\mathbf{a}-\mathbf{b}$

【答案】D

【解析】

$\because$单位向量$\vec{a},\vec{b}$夹角为60°

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^{\circ}=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

且$\vec{b}^2=|\vec{b}|^2=1$

又$\because$两向量垂直，则其数量积为0

设与$\vec{b}$垂直的向量为$x\vec{a}+y\vec{b}$

$\therefore \vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=0$

$x\vec{a}\cdot\vec{b}+y\vec{b}^{2}=0$

$\therefore \frac{1}{2}x+y=0$

即$\frac{x}{y}=-2$

$\therefore$选 D

6.记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_5-a_3=12$，$a_6-a_4=24$，则$\frac{S_n}{a_n}=$（　　）

A. 2^n-1　　B. $2-2^{1-n}$　　C. $2-2^{n-1}$　　D. $2^{1-n}-1$

【答案】B

【解析】

对于等比数列，$a_6=a_5\cdot q, a_4=a_3\cdot q$

$\therefore a_6-a_4=a_5\cdot q-a_3\cdot q=(a_5-a_3)q$

根据题意知，$q=2$

$\because a_5-a_3=a_3\cdot q^2-a_3=4a_3-a_3=12$

$\therefore a_3=4$

$\therefore a_n=a_3\cdot q^{n-3}=4\cdot 2^{n-3}=2^{n-1}$

$\therefore a_1=1$

$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$

$\therefore \frac{S_n}{a_n}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-2^{1-n}$

$\therefore$选 B

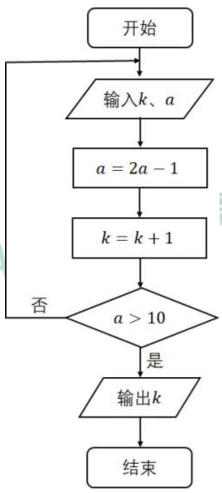
7.执行右面的程序框图，若输入的$k=0$，$a=0$，则输出的k为（　　）

A.2

B.3

C.4

D.5



【答案】C

【解析】

程序图计算如下

$a=0,k=0$

$a=0\times2+1=1,k=0+1=1$

$a=1\times2+1=3,k=1+1=2$

$a=3\times2+1=7,k=2+1=3$

$a=7\times2+1=15,k=3+1=4$

$\because a=15>10$

$\therefore$输出$k=4$

$\therefore$选 C

8. 若过点$(2,1)$的圆与两坐标轴都相切，则圆心到直线$2x-y-3=0$的距离为（　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】

设该圆圆心坐标为(a,b)

$\because$该圆与x轴，y轴都相切

$\therefore |a|=|b|$

$\because$该圆过$(2,1)$

$\therefore$该圆在第一象限，且$a=b>0$

由此可设该圆方程为$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

$\because$圆过$(2,1)$

$\therefore (2-a)^2+(1-a)^2=a^2$

$\therefore a=1$或$a=5$　　圆心坐标为$(1,1)$或$(5,5)$

$\therefore$圆心到直线$2x-y-3=0$的距离为：

$$d_1=\frac{|2\times1-1-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$d_2=\frac{|2\times5-5-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore d=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\therefore$选 B

9. 设O为坐标原点，直线$x=a$与双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线分别交于$D,E$两点，若△ODE的面积为 8，则$C$的焦距的最小值为（ ）

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

【答案】B

【解析】

双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线为：$y=\pm\frac{b}{a}x$

$\because a>0,$

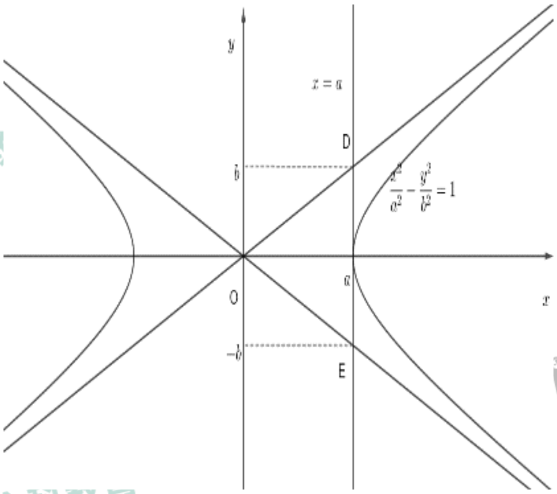
$\therefore x=a$与双曲线两焦点坐标为$D(a,b),E(a,-b)$

$\therefore S_{\triangle ODE}=2\times\frac{1}{2}\times a\times b=ab=8$

由$c^2=a^2+b^2\geq2\sqrt{a^2b^2}=2ab=16$

$\therefore c\geq4$

$\therefore$焦距的最小值为$2c=8$



$\therefore$选 B

10. 设函数 $f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}$，则 $f(x)$（　　）

A.是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增　B.是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

C.是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增　D.是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

【答案】A

【解析】

$f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}$，则 $f(-x)=-x^3+\frac{1}{x^3}=-f(x)$

$\therefore f(x)$是奇函数，

又$\because x^3$是增函数，

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}$在$(0,+\infty)$上单调递增

$\therefore$选 A

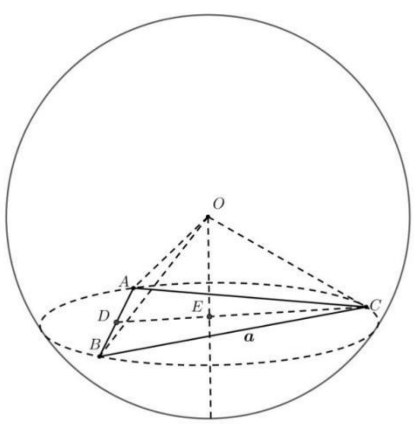
11. 已知ΔABC是面积为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$的等边三角形，且其顶点都在球0的球面上。若球O的表面积为16π，则O到平面ABC的距离为（ ）

A.$\sqrt{3}$　　B.$\frac{2}{3}$　　C.1　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【解析】

如右图所示



$\because S_{\Delta ABC}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\therefore a=3,CD=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,故$CE=\dfrac{2}{3}CD=\sqrt{3}$

又$\because S_{球}=4\pi r^2=16\pi$

$\therefore r=OC=2$

$\therefore OE=\sqrt{OC^2-CE^2}=\sqrt{4-3}=1$

$\therefore$选 C

12. 若$2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，则（　　）

A. $\ln(y-x+1)>0$　　B. $\ln(y-x+1)<0$

C. $\ln|x-y|>0$　　D. $\ln|x-y|<0$

【答案】A

【解析】

$\because 2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$

移项得$2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$

令$f(x)=2^x-3^{-x}$

$\because y=2^x$和$y=-3^{-x}$在R上单调递增

$\therefore f(x)$在R上单调递增

$\therefore x<y$

$\therefore y-x>0$

$\therefore y-x+1>1$

$\therefore \ln(y-x+1)>0$

$\therefore$选 A

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 若$\sin x=-\frac{2}{3}$，则$\cos 2x=$______.

【答案】$\frac{1}{9}$

【解析】

$\cos 2x=1-2\sin^2 x=\frac{1}{9}$

14. 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_1=-2$，$a_2+a_6=2$，则$S_{10}=$______.

【答案】25

【解析】

记$\{a_n\}$的公差为d，由$a_2+a_6=a_1+d+a_1+5d=2$且$a_1=-2$，得出$d=1$，

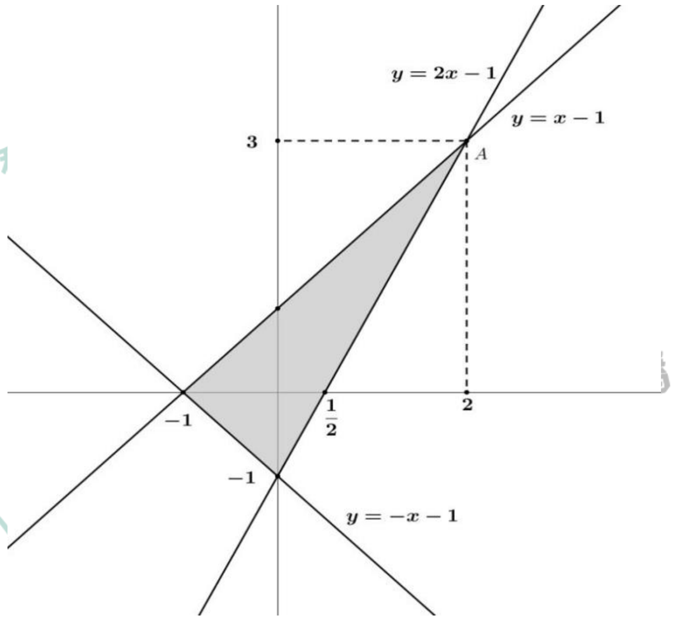
故$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=10a_1+45d=25$.

15. 若x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y\geq -1\\ x-y\geq -1\\ 2x-y\leq 1\end{cases}$，则$z=x+2y$的最大值是______.

【答案】8

【解析】

先根据约束条件画出如下可行域：



将 z 的值转化为直线 $z=x+2y$ 在 y 轴上的截距，且当直线 $z=x+2y$ 经过点 $A(2,3)$ 时的截距最大，即 z 的最大值为 $z=2+2\times3=8$.

16. 设有下列四个命题：

p_1：两两相交且不过同一点的三两直线必在同一平面内.

p_2：过空间中任意三点有且只有一个平面.

p_3：若空间两条直线不相交，则这两条直线平行.

p_4：若直线 $l\subset$ 平面 α，直线 $m\perp$ 平面 α，则 $m\perp l$.

则下述命题中所有真命题的序号是______.

① $p_1\wedge p_4$　　② $p_1\wedge p_4$　　③ $\neg p_2\vee p_3$　　④ $\neg p_3\vee\neg p_4$

【答案】①③④

【解析】

p_1 对，设三条直线为 l_1,l_2,l_3，不妨设 l_1,l_2 相交于点 A，且 l_1,l_2 在同一个平面 α 上，又 l_3 与 l_1,l_2 都相交，不妨设交点分别为 B,C，则 B,C 在平面 α 上，故 l_3 在平面 α 上，则 l_1,l_2,l_3 在同一个平面上.

p_2 错，若三点在同一条线上，则经过该三点有无数个平面

p_3 错；p_4 对，$m\perp$ 平面 α，且 $l\subset$ 平面 α，则 $m\perp l$.

则①③④是真命题

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)+\cos A=\frac{5}{4}$.

(1) 求 A；

(2) 若 $b-c=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，证明：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

【解析】

(1)

$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+A\right)+\cos A=\frac{5}{4}$

$(-\sin A)^2+\cos A=\frac{5}{4}$

$\sin^2 A+\cos A=\frac{5}{4}$

$1-\cos^2 A+\cos A=\frac{5}{4}$

$\cos^2 A-\cos A+\frac{1}{4}=0$

$\left(\cos A-\frac{1}{2}\right)^2=0$

$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$

又 $\because A\in(0,\pi)$

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$

（2）由$b-c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

根据正弦定理可得：

$\sin B-\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin A$

又$\because A=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \sin B-\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}$

由$A+B+C=\pi$得 $\sin C=\sin\left[\pi-\left(A+B\right)\right]=\sin\left(A+B\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+B\right)$

$\therefore \sin B-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+B\right)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \sin B-\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\cos B+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin B\right)=\dfrac{1}{2}$

$\sin B-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B\right)=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2}\sin B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\dfrac{1}{2}$

$\sin\left(B-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\because B\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$\therefore B-\dfrac{\pi}{3}\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\therefore B-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$

$B=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \triangle ABC$为直角三角形

18. 某沙漠地区经过治理，生态系统得到很大改善，野生动物数量有所增加，为调查该地区某种野生动物的数量，将其分成面积相近的 200 个地块，从这些地块中用简单随机抽样的方法抽取 20 个作为样区，调查得到样本数据(x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,20)$，其中x_i

和 y_i 分别表示第 i 个样区的植物覆盖面积（单位：公顷）和这种野生动物的数量，并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{20} x_i = 60$，$\sum\limits_{y=1}^{20} y_i = 1200$，$\sum\limits_{i=1}^{20} (x_i - \overline{x})^2 = 80$，$\sum\limits_{i=1}^{20} (y_i - \overline{y})^2 = 9000$，$\sum\limits_{i=1}^{20} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = 800$.

（1）求该地区这种野生动物数量的估计值（这种野生动物数量的估计值等于样区这种野生动物数量的平均数乘以地块数）；

（2）求样本 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \cdots, 20)$ 的相关系数（精确到 0.01）；

（3）根据现有统计资料，各地块间植物覆盖面积差异很大，为提高样本的代表性以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计，请给出一种你认为更合理的抽样方法。并说明理由.

附：相关系数 $r = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}}$，$\sqrt{2} \approx 1.414$.

【解析】

（1）由样区这种野生生物数量的平均数为：$\overline{y} = \dfrac{1}{20}\sum\limits_{i=1}^{20} y_i = 60$

所以该地区这种野生生物数量的估计值为：$200\overline{y} = 12000$

（2）$r = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}} = \dfrac{800}{\sqrt{80 \times 9000}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.94$

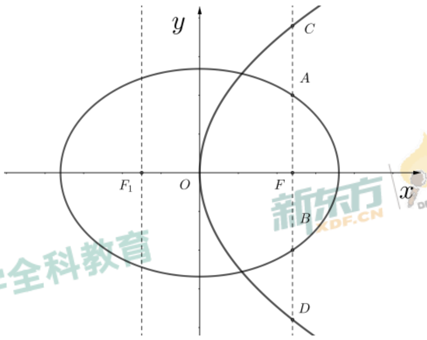
（3）分层抽样的方法，由（2）知植物覆盖面积与野生动物数量相关性很强。因为植物覆盖面积差异很大，会导致野生动物活动范围存在大的差异，因此为了提高样本的代表性，要采取分层抽样的抽样方法。

19. 已知椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点$F$与抛物线$C_2$的焦点重合，$C_1$的中心与$C_2$的顶点重合，过$F$且与$x$轴垂直的直线交$C_1$于$A$，$B$两点，交$C_2$于$C$，$D$两点，且$|CD|=\dfrac{4}{3}|AB|$.

（1）求C_1的离心率；

（2）若C_1的四个顶点到C_2的准线距离之和为12，求C_1与C_2的标准方程。

【解析】



（1）设右焦点$F(c,0)$ $(c>0)$，抛物线方程为$y^2=2px$ $(p>0)$，则抛物线的焦点为

$(\dfrac{p}{2},0)$

$\therefore \dfrac{p}{2}=c$，$p=2c$

$\therefore$抛物线方程为：$y^2=4cx$

C、D点横坐标为c，带入上式：

$y^2=4c^2$，$y=\pm 2c$

$\therefore C(c,2c)\ \ D(c,-2c)$

$|CD|=4c$

$\therefore |AB|=\dfrac{3}{4}|CD|=3c$

$\therefore A(c,\dfrac{3}{2}c)\quad B(c,-\dfrac{3}{2}c)$

C_1的另一个焦点坐标为$F_1(-c,0)$

$AF_1=\sqrt{(\frac{3}{2}c)^2+(2c)^2}=\frac{5}{2}c$

$AF=\frac{3}{2}c$

$\therefore 2a=\frac{5}{2}c+\frac{3}{2}c=4c$

$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

（2）由题意得：$(a-c)+(a+c)+2c=12$，即 $a+c=6$

又 $\because \frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，解得 $\begin{cases} a=4 \\ c=2 \end{cases}$

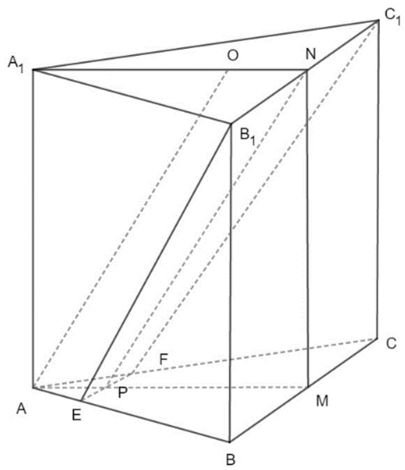
则有：$b^2=a^2-c^2=12$

$\frac{p}{2}=c=2$，即 $p=4$

$\therefore C_1$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$；

C_2 的标准方程为 $y^2=8x$

20. 如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，侧面 BB_1C_1C 是矩形，M，N 分别为 BC，B_1C_1 的中点，P 为 AM 上一点，过 B_1C_1 和 P 的平面交 AB 于 E，交 AC 于 F.



（1）证明：$AA_1//MN$，且平面 $A_1AMN\perp$ 平面 EB_1C_1F；

（2）设 O 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心，若 $AO=AB=6, AO//$ 平面 EB_1C_1F，且 $\angle MPN=\frac{\pi}{3}$，求四棱锥 $B-EB_1C_1F$ 的体积.

【解析】

（1）$\because M$ 、N 为矩形 BB_1C_1C 中 BC，B_1C_1 中点

$\therefore MN//BB_1$

又$\because$ 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1//BB_1$

$\therefore MN//AA_1$

又$\because N$ 为 B_1C_1 中点，$\triangle A_1B_1C_1$ 为正三角形

$\therefore A_1N\perp B_1C_1$

又$\because B_1C_1\perp B_1B$

$\therefore B_1C_1\perp AA_1$

$\because AA_1$、A_1N 为平面 A_1AMN 中两相交直线

$\therefore B_1C_1\perp$ 平面 A_1AMN

又$\because B_1C_1\subset$ 平面 EB_1C_1F

$\therefore$ 平面 $A_1AMN\perp$ 平面 EB_1C_1F

（2）$\because$ 面 EB_1C_1F 与面 $A_1B_1C_1$、面 ABC 分别交于 B_1C_1、EF

且在三棱柱中面 EB_1C_1F 平行于面 $A_1B_1C_1$

$\therefore B_1C_1 // EF$

$\therefore$ 四边形 EB_1C_1F 为梯形

$\because B_1C_1\perp BC$

$\therefore BC//$ 面 EB_1C_1F

$\therefore B$ 到四边形 EB_1C_1F 的距离即为 M 到四边形 EB_1C_1F 的距离

$\because M$ 是 N 在底面的投影

在 NP 上取一点 G，使 $MG\perp PN$

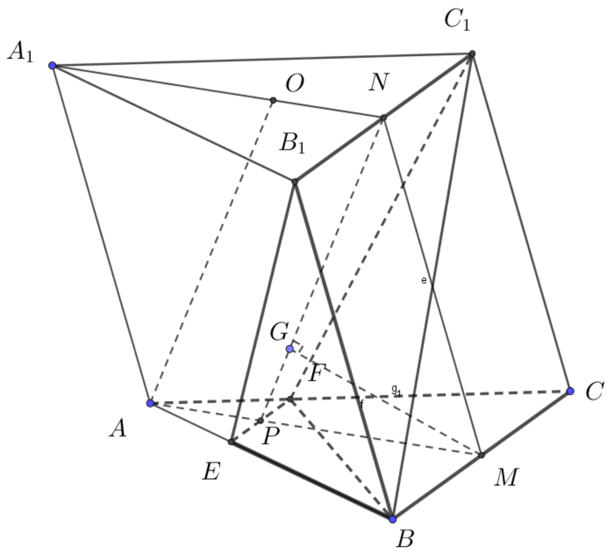
则 MG 为点 M 到四边形 EB_1C_1F 的距离

由题意可得四边形 $OAPN$ 为平行四边形

$\therefore NP=AO=6$

$$\left.\begin{aligned} A_1O &= \frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6 = 2\sqrt{3} = PM \\ ON &= \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6 = \sqrt{3} = PA \end{aligned}\right\} \Rightarrow AM = 3\sqrt{3}$$

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC$



$\therefore \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{EF}{BC} \Rightarrow EF = 2$

$\because B_1C_1 = 6$， $PN = 6$

$S = \dfrac{1}{2} PN \cdot PM \cdot \sin\angle MPN$

$= \dfrac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 9$

又 $S = \dfrac{1}{2} NP \cdot MG$

$\therefore MG = 3$

$\therefore V = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3}\times(2+6)\times 6\times\dfrac{1}{2}\times 3 = 24$

21．已知函数 $f(x) = 2\ln x + 1$.

（1）若 $f(x) \le 2x + c$，求 c 的取值范围.

（2）设 $a > 0$，讨论函数 $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 的单调性.

【解析】

（1） $f(x) = 2\ln x + 1$， $x > 0$

$c \ge 2\ln x - 2x + 1$

令 $g(x) = 2\ln x - 2x + 1$

$g'(x) = \dfrac{2}{x} - 2$，易知 $g'(1) = 0$

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减

$\therefore g(x)_{\max} = g(1) = -1$

$\therefore c\in[-1,+\infty)$

（2）$g(x)=\dfrac{2\ln x-2\ln a}{x-a}$，定义域为$(0,a)\cup(a,+\infty)$

$$g'(x)=\frac{\frac{2}{x}(x-a)-2\ln x+2\ln a}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{2-\frac{2a}{x}-2\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{(x-a)^2}$$

令$h(x)=-\ln\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}+1$

$h'(x)=-\dfrac{a}{x}\cdot\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{-x+a}{x^2}$， $h'(a)=0$

故$h(x)$在$(0,a)$上递增，$(a,+\infty)$上递减

$h(x)_{\max}=h(a)=0$

即$g'(x)<0$

$\therefore g(x)$在$(0,a)$，$(a,+\infty)$上单调递减

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：极坐标与参数方程]

已知曲线C_1，C_2的参数方程分别为

$$C_1:\begin{cases}x=4\cos^2\theta,\\ y=4\sin^2\theta\end{cases}(\theta\text{为参数}),\quad C_2:\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t},\\ y=t-\dfrac{1}{t}\end{cases}(t\text{为参数}).$$

（1）将C_1，C_2的参数方程化为普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系.设C_1,C_2的焦点为P，求圆心在极轴上，且经过极点和P的圆的极坐标方程.

【解析】

（1）$\because C_1$: $\begin{cases} x = 4\cos^2\theta \\ y = 4\sin^2\theta \end{cases}$, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore C_1$的直角坐标方程为: $x + y = 4$

$\because x = 4\cos^2\theta \quad 0 \le \cos^2\theta \le 1$

$\therefore 0 \le x \le 4$

$\therefore C_1$的直角坐标方程为：$x + y - 4 = 0(0 \le x \le 4)$

$\because C_2$: $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = t - \dfrac{1}{t} \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x^2 = t^2 + \dfrac{1}{t^2} + 2 & ① \\ y^2 = t^2 + \dfrac{1}{t^2} - 2 & ② \end{cases}$

①−②得$x^2 - y^2 = 4$

$\because x = t + \dfrac{1}{t}$

当$t > 0$时，$x \ge 2$

当$t < 0$时，$x \le -2$

$\therefore C_2$的直角坐标方程为$x^2 - y^2 = 4$

综上：C_1的直角坐标方程为：$x + y - 4 = 0(0 \le x \le 4)$

C_2的直角坐标方程为$x^2 - y^2 = 4$

（2）C_1与C_2交点P: $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\therefore P$点坐标为$\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

设经过极点与P的圆的圆心坐标为$(a, 0)$

$\therefore a^2 = \left(a - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

$\therefore a = \dfrac{17}{10}$

$\therefore$圆的直角坐标方程为:$\left(x-\frac{17}{10}\right)^2+y^2=\left(\frac{17}{10}\right)^2$

$\therefore x^2+y^2-\frac{17}{5}x=0$

$\because \begin{cases} x^2+y^2=\rho^2 \\ x=\rho\cos\theta \end{cases}$

$\therefore$圆的极坐标方程为:$\rho=\frac{17}{5}\cos\theta$

综上：圆的极坐标方程为:$\rho=\frac{17}{5}\cos\theta$

23. [选修 4-5：不等式选讲]

已知函数 $f(x)=\left|x-a^2\right|+\left|x-2a+1\right|$.

（1）当$a=2$时，求不等式$f(x)\geq 4$的解集；

（2）若 $f(x)\geq 4$,求a的取值范围.

【解析】

解:(1)当$a=2$时，$f(x)=|x-4|+|x-3|$

①当$x\leq 3$时，$f(x)=4-x+3-x=7-2x$

②当$3<x<4$时，$f(x)=4-x+x-3=1$

③当$x\geq 4$时，$f(x)=x-4+x-3=2x-7$

$\therefore f(x)=\begin{cases} 7-2x, x\leq 3 \\ 1, 3<x<4 \\ 2x-7, x\geq 4 \end{cases}$

又$\because f(x)\geq 4$

即①当$x\leq 3$时,$7-2x\geq 4$

$\therefore x\leq \frac{3}{2}$

②当$3<x<4$时,$1\geq 4$(舍去)

③当$x\geq 4$时,$2x-7\geq 4$

$\therefore x\geq \frac{11}{2}$

综上，不等式 $f(x)\ge 4$ 的解集为 $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{11}{2},+\infty\right)$

(2) $\left|x-a^2\right|+\left|x-2a+1\right|\ge\left|x-a^2-(x-2a+1)\right|=\left|a^2-2a+1\right|=(a-1)^2$

$\because f(x)\ge 4$

$\therefore (a-1)^2\ge 4$

$\therefore a\ge 3$ 或 $a\le -1$

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$