2020 年北京市西城区高三诊断性测试数学考试逐题解析

2020.5

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第 I 卷（选择题　共 40 分）

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设集合 $A=\{x||x|<3\},B=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$,则 $A\cap B=$

（A）$\{0,2\}$　　（B）$\{-2,2\}$

（C）$\{-2,0,2\}$　　（D）$\{-2,-1,0,1,2\}$

【答案】C

【解析】本题考查集合的运算.

因为 $A=\{x||x|<3\}=\{x|-3<x<3\},B=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$,

所以 $A\cap B=\{-2,0,2\}$.

故选 C.

2. 若复数 z 满足 $z\cdot\mathrm{i}=-1+\mathrm{i}$,则在复平面内 z 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

【答案】A

【解析】本题考查复数.

由题意,复数 $z=\dfrac{-1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{(-1+\mathrm{i})\cdot(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})}=1+\mathrm{i}$.

所以复数 z 在复平面内对应的点的坐标 $(1,1)$ 位于第一象限.

故选 A.

3. 下列函数中,值域为 $\mathbf{R}$ 且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

（A） $y=-x^3$ （B） $y=x|x|$

（C） $y=x^{-1}$ （D） $y=\sqrt{x}$

【答案】B

【解析】本题考查函数的值域与单调性.

选项 A: $y=-x^3$ 值域为 $\mathbf{R}$,在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,不符合题意;

选项 B: $y=x|x|=\begin{cases}x^2, & x\geq 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$ 值域为 $\mathbf{R}$,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,符合题意;

选项 C: $y=x^{-1}$ 值域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,不符合题意;

选项 D: $y=\sqrt{x}$ 值域为 $[0,+\infty)$,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,不符合题意;

故选 B.

4. 抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为

（A） $x=1$ （B） $x=-1$

（C） $y=1$ （D） $y=-1$

【答案】D

【解析】本题考查抛物线.

抛物线$x^2=4y$开口向上,$2p=4, p=2, \frac{p}{2}=1$,所以准线方程为$y=-\frac{p}{2}=-1$.

故选 D.

5. 在$\triangle ABC$中,若$a:b:c=4:5:6$,则其最大内角的余弦值为

（A）$\frac{1}{8}$　　（B）$\frac{1}{4}$

（C）$\frac{3}{10}$　　（D）$\frac{3}{5}$

【答案】A

【解析】本题考查余弦定理.

因为在$\triangle ABC$中,若$a:b:c=4:5:6$,

所以$\angle C$是其最大内角.

设$a=4t, b=5t, c=6t(t>0)$,

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{16t^2+25t^2-36t^2}{2\times 4t\times 5t}=\frac{1}{8}.$$

故选 A.

6. 设$a=3^{0.2}, b=\log_3 2, c=\log_{0.2} 3$,则

（A）$a>c>b$　　（B）$a>b>c$

（C）$b>c>a$　　（D）$b>a>c$

【答案】B

【解析】本题考查指对数运算.

因为$1=3^0<3^{0.2}<3^1=3$,所以$a\in(1,3)$;

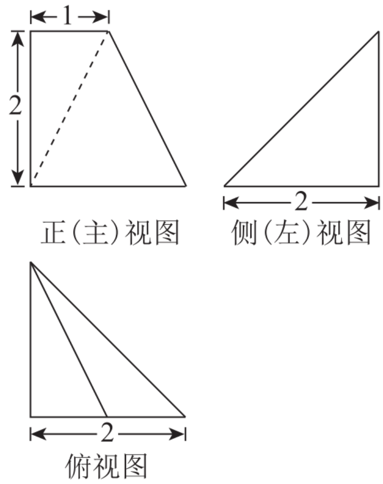
因为$0=\log_3 1<\log_3 2<\log_3 3=1$,所以$b\in(0,1)$;

因为$-1=\log_{0.2}5<\log_{0.2}3<\log_{0.2}1=0$,所以$c\in(-1,0)$.

所以$a>b>c$.

故选 B.

7. 某四棱锥的三视图如图所示,则该四棱锥的体积是



（A）6

（B）4

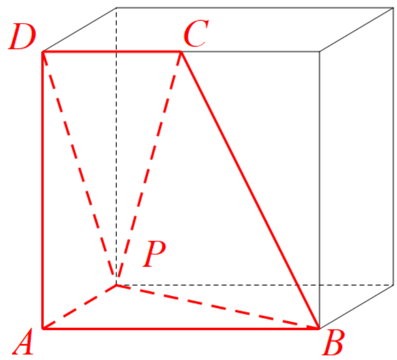
（C）3

（D）2

【答案】D

【解析】本题考查三视图.

该三视图的直观图如图所示,



$$V_{\text{棱锥}P-ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{\text{梯形}ABCD}\times PA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(1+2)\times 2\times 2=2.$$

故选 D.

8. 若圆$x^2+y^2-4x+2y+a=0$与x轴,y轴均有公共点,则实数a的取值范围是

（A）$(-\infty,1]$　　（B）$(-\infty,0]$

（C）$[0,+\infty)$　　（D）$[5,+\infty)$

【答案】A

【解析】本题考查圆的标准方程.

由题可知圆的标准方程为$(x-2)^2+(y+1)^2=5-a(a<5)$,

所以该圆是以$(2,-1)$为圆心,$\sqrt{5-a}$为半径的圆.

因为圆与x轴,y轴均有公共点,

所以圆心到两个坐标轴的距离均不大于半径,

即$\begin{cases}2\le\sqrt{5-a}\\1\le\sqrt{5-a}\\a<5\end{cases}\Rightarrow a\le 1$.

故选 A.

9. 若向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线,则“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$”是“$2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】本题考查向量的数量积.

方法一:

充分条件:由题知,$|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$构成三角形的三边.

因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{b}|$,

即$2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.所以充分条件成立.

必要条件:当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直时,满足$2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,

但此时$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$不成立.所以必要条件不成立.

故选 A.

方法二:设向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$,

$(2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|)^2=4(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$

$=4|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2-8|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$

$\geq 4|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2-4(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)\cos\theta$ ①

$(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leq 2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2$ ②

当$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$时,$\cos\theta<0,(\theta\neq\pi)$,

此时①$\geq 4|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2$,①$-$②$\geq 2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2>0$

所以充分条件成立.

当$2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$时,则①>②.

所以①$-$②$\geq 2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)(1-2\cos\theta)>0$

所以$\cos\theta<\frac{1}{2}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$不恒成立.

所以必要条件不成立.

故选 A.

10. 设函数$f(x)=(x-1)e^x$.关于x的不等式$f(x)<ax-1$有且仅有一个整数解,则正数a的取值范围是

（A）$(0,e]$　　（B）$(0,e^2]$

（C）$(1,\frac{e^2}{2}]$　　（D）$(1,\frac{e^2+1}{2}]$

【答案】D

【解析】本题考查函数与导数.

令$g(x)=f(x)-(ax-1)=(x-1)e^x-ax+1$

因为 $g(0)=0$, 所以若 $f(x)<ax-1$ 有且仅有一个整数解,则 $g(x)<0$ 有且仅有一个整数解.

又因为 $g'(x)=xe^x-a(x\in\mathbf{R},a>0)$

令 $h(x)=g'(x),h'(x)=(x+1)e^x$

令 $h'(x)=0,x=-1$.

所以当 $x\in(-\infty,-1)$ 时, $h(x)$ 为减函数;当 $x\in(-1,+\infty)$ 时, $h(x)$ 为增函数.

又因为当 $x>0$ 时, $xe^x>0$, 当 $x<0$ 时, $xe^x<0$.

所以当 $x<0$ 时, $g'(x)=xe^x-a<-a<0$.

当 $x>0$ 时, $g'(x)=xe^x-a>-a$ 且 $g'(x)$ 为增函数,

因为 $g'(a)=ae^a-a>0,g'(0)=-a<0$.

所以 $\exists x_0\in(0,a)$, 使得 $g'(x_0)=0$.

x	$(-\infty,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

因为 $g(0)=0$, 且 $g(x)<0$ 有且仅有一个整数解,

所以 $\begin{cases} g(1)<0 \\ g(2)\ge 0 \\ 0<x_0<a \\ 0<x_0<2 \end{cases}$,解得 $1<a\le\dfrac{e^2+1}{2}$.

故选 D.

第 II 卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 设平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2),\boldsymbol{b}=(k,2)$ 满足 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{b}|=$ ______.

【答案】$2\sqrt{5}$

【解析】本题考查平面向量的坐标运算.

因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times k+(-2)\times 2=0$,解得 $k=4$,

所以 $\boldsymbol{b}=(4,2),|\boldsymbol{b}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

12. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1(a>0)$ 经过点 $(2,0)$,则该双曲线渐近线的方程为______.

【答案】 $y=\pm 2x$

【解析】本题考查双曲线的渐近线方程.

将点 $(2,0)$ 代入双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1$,得 $\frac{4}{a^2}=1$,即 $a^2=4$,

因为 $a>0$,所以 $a=2$,

由双曲线方程可知 $b=4$,

所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$,即 $y=\pm 2x$.

13. 设函数 $f(x)=\sin 2x+2\cos^2 x$.则函数 $f(x)$ 的最小正周期为______;若对于任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)\le m$ 成立,则实数 m 的最小值为______.

【答案】 $\pi;\sqrt{2}+1$

【解析】本题考查三角函数性质的综合应用.

$f(x)=\sin 2x+2\cos^2 x=\sin 2x+\cos 2x+1=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$,

最小正周期$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$,

若对于任意$x\in\mathbf{R}$,都有$f(x)\le m$成立,

只需$m\ge f(x)_{\max}$.

因为$\sin(2x+\frac{\pi}{4})\le 1$,所以$\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1\le\sqrt{2}+1$,即$f(x)_{\max}=\sqrt{2}+1$.

所以$m\ge\sqrt{2}+1$,即m的最小值为$\sqrt{2}+1$.

14. 甲、乙、丙、丁四人参加冬季滑雪比赛,其中有两人最终获奖.在比赛结果揭晓之前,四人的猜测如下表,其中“√”表示猜测某人获奖,“×”表示猜测某人未获奖,而“○”则表示对某人是否获奖未发表意见.已知四个人中有且只有两个人的猜测是完全正确的,那么两名获奖者是______,______.

	甲获奖	乙获奖	丙获奖	丁获奖
甲的猜测	√	×	×	√
乙的猜测	×	○	○	√
丙的猜测	×	√	×	√
丁的猜测	○	○	√	×

【答案】乙,丁

【解析】本题考查逻辑推理.

因为四个人中有且只有两个人的猜测是完全正确的,

由甲、乙、丙猜测“丁获奖”,丁猜测“丁未获奖”可知,丁的猜测不是完全正确的,

由乙、丙猜测“甲未获奖”,甲猜测“甲获奖”可知,甲的猜测不是完全正确的,

所以乙、丙的猜测是完全正确的,

由丙的猜测可知,两名获奖者分别是乙,丁.

15. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $PA=AB=4,E,F,H$ 分别是棱 PB,BC,PD 的中点,对于平面 EFH 截四棱锥 $P-ABCD$ 所得的截面多边形,有以下三个结论:

①截面的面积等于 $4\sqrt{6}$;

②截面是一个五边形;

③直线 PC 与截面所在的平面 EFH 无公共点.

其中,所有正确结论的序号是______.

【答案】②③

【解析】

根据题意易知:平面 EFH 截四棱锥 $P-ABCD$ 所得的截面多边形为五边形 $EFGHK$,

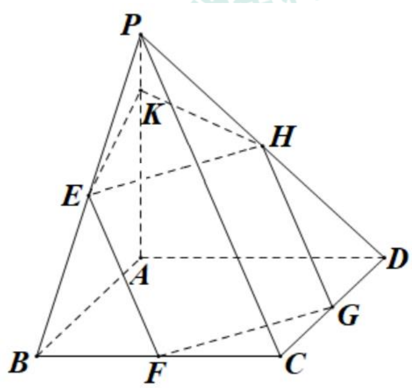
其中 G 为棱 CD 的中点, K 为侧棱 PA 的上四等分点.

此时 $EF\mathbin{//}HG\mathbin{//}PC,EH\mathbin{//}FG\mathbin{//}BD$,四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

故②③正确.

又因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,所以 $PA\perp BD$.

因为底面 $ABCD$ 为正方形,



所以 $AC \perp BD$,

又因为 $PA \cap AC = A$,所以 $BD \perp$ 平面 PAC.

所以 $BD \perp PC, EH \perp EF$.

所以平行四边形 $EFGH$ 为矩形,其面积等于 $EF \cdot FG = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$.

截面面积大于矩形 $EFGH$ 的面积,故①不正确.

综上:②③正确.

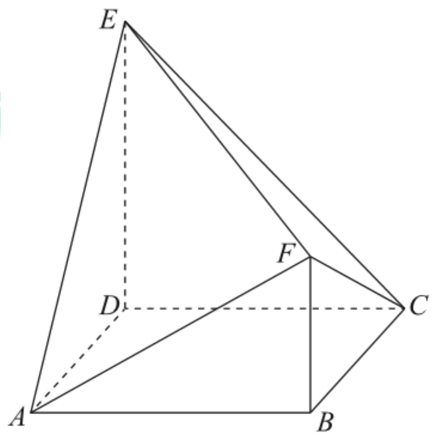
三、解答题：共 6 小题，共 85 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

16. （本小题满分 14 分）

如图,在几何体 $ABCDEF$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $DE // BF$,且 $DE = 2BF = 2$.

（Ⅰ）求证:平面 BCF // 平面 ADE;

（Ⅱ）求钝二面角 $D - AE - F$ 的余弦值.



【解析】

（Ⅰ）因为 $DE // BF$, $DE \subset$ 平面 ADE , $BF \not\subset$ 平面 ADE ,

所以 $BF //$ 平面 ADE .

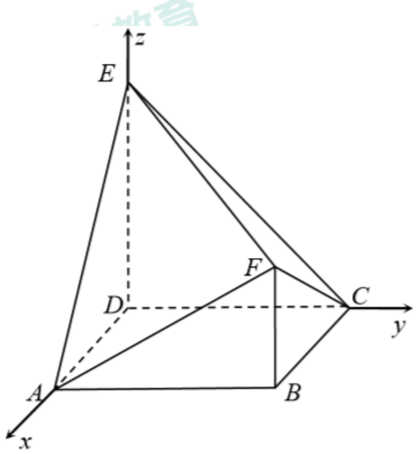
同理,得 $BC //$ 平面 ADE .

又因为 $BC \cap BF = B$, $BC \subset$ 平面 BCF , $BF \subset$ 平面 BCF ,

所以平面 BCF // 平面 ADE ,

（Ⅱ）由 $DE \perp$ 平面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 是正方形,

得 DA, DC, DE 两两垂直,则以 D 为原点,分别以 DA, DC, DE 为 x 轴, y 轴, z 轴,如图建立空间直角坐标系,



则 $D(0,0,0)$, $E(0,0,2)$, $F(2,2,1)$, $A(2,0,0)$,

所以 $\overrightarrow{AE} = (-2,0,2)$, $\overrightarrow{AF} = (0,2,1)$,

设平面 AEF 的法向量 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$,

由 $\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \\ \overrightarrow{AF} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \end{cases}$,得 $\begin{cases} -2x + 2z = 0, \\ 2y + z = 0, \end{cases}$

令 $y=1$,得 $\boldsymbol{n}=(-2,1,-2)$.

平面 ADE 的法向量 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$.

设钝二面角 $D-AE-F$ 的平面角为 θ,

则 $|\cos\theta|=|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}|=\frac{1}{3}$,

又因为二面角为钝角,所以 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$,

即钝二面角 $D-AE-F$ 的余弦值为 $-\frac{1}{3}$.

17. （本小题满分 14 分）

从①前 n 项和 $S_n=n^2+p(p\in\mathbf{R})$,② $a_n=a_{n+1}-3$,③ $a_6=11$ 且 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 这三个条件中任选一个,补充到下面的问题中,并完成解答.

在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=1$,_______,其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（Ⅱ）若 a_1,a_n,a_m 成等比数列,其中 $m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $m>n>1$,求 m 的最小值.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

【解析】

选①前 n 项和 $S_n=n^2+p(p\in\mathbf{R})$ 时,

（Ⅰ）当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=1+p=1$,

所以 $p=0$,故 $S_n=n^2$,

当 $n\geq 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$,

经检验 $n=1$ 时, $a_1=2\times1-1=1$ 符合上式,

故 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅱ）因为 a_1,a_n,a_m 成等比数列,

所以 $a_n^2=a_1a_m$,

即 $(2n-1)^2=2m-1$,

化简得 $m=2n^2-2n+1=2(n-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$,

因为 $m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $m>n>1$,

所以当 $n=2$ 时, m 有最小值 5.

选② $a_n=a_{n+1}-3$ 时,

（Ⅰ）由题知 $a_{n+1}-a_n=3,a_1=1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项 3 为公差的等差数列,

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=1+3(n-1)=3n-2(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅱ）因为 a_1,a_n,a_m 成等比数列,

所以 $a_n^2=a_1a_m$,

即 $(3n-2)^2=3m-2$,

化简得 $m=3n^2-4n+2=3(n-\frac{2}{3})^2+\frac{2}{3}$,

因为 $m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $m>n>1$,

所以当 $n=2$ 时, m 有最小值 6.

选③ $a_6=11$ 且 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 时,

（Ⅰ）因为 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$,

所以 $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,

由题知 $\begin{cases}a_1=1\\a_6=a_1+5d\end{cases}$,解得 $d=2$,

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅱ）因为 a_1,a_n,a_m 成等比数列,

所以 $a_n^2=a_1a_m$,

即 $(2n-1)^2=2m-1$,

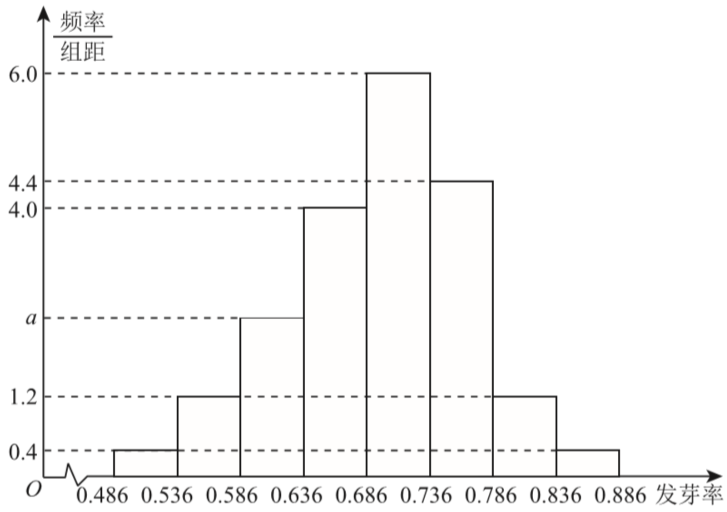
化简得 $m=2n^2-2n+1=2(n-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$,

因为 $m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $m>n>1$,

所以当 $n=2$ 时,m 有最小值5.

18.（本小题满分 14 分）

某花卉企业引进了数百种不同品种的康乃馨,通过试验田培育,得到了这些康乃馨种子在当地环境下的发芽率,并按发芽率分为 8 组:$[0.486,0.536)$,$[0.536,0.586)$,…,$[0.836,0.886)$ 加以统计,得到如图所示的频率分布直方图.



企业对康乃馨的种子进行分级,将发芽率不低于0.736的种子定为“A 级”,发芽率低于0.736但不低于0.636的种子定为“B 级”,发芽率低于0.636的种子定为“C 级”.

（Ⅰ）现从这些康乃馨种子中随机抽取一种,估计该种子不是“C 级”种子的概率;

（Ⅱ）该花卉企业销售花种,且每份“A 级”、“B 级”、“C 级”康乃馨种子的售价分别为 20 元、15 元、10 元.某人在市场上随机购买了该企业销售的康乃馨种子两份,共花费 X 元,以频率为概率,求 X 的分布列和数学期望;

（Ⅲ）企业改进了花卉培育技术,使得每种康乃馨种子的发芽率提高到原来的1.1倍,那么对于这些康乃馨的种子,与旧的发芽率数据的方差相比,技术改进后发芽率数据的方差是否发生变化?若发生变化,是变大了还是变小了?（结论不需要证明）.

【解析】

（Ⅰ）设事件 M 为:“从这些康乃馨种子中随机抽取一种,且该种子不是“C 级”种子”,

由图表,得 $(0.4+1.2+a+4.0+6.0+4.4+1.2+0.4)\times 0.05=1$

解得 $a=2.4$

由图表,知“C 级”种子的频率为 $(0.4+1.2+2.4)\times 0.05=0.2$

故可估计从这些康乃馨种子中随机抽取一种,该种子是“C 级”的概率为 0.2

因为事件 M 与事件“从这些康乃馨种子中随机抽取一种,且该种子是“C 级”种子”为对立事件,

所以事件 M 的概率 $P(M)=1-0.2=0.8$.

（Ⅱ）由题意,任取一种种子,恰好是“A 级”康乃馨的概率为 $(4.4+1.2+0.4)\times 0.05=0.3$,

恰好是“B 级”康乃馨的概率为 $(4.0+6.0)\times 0.05=0.5$

恰好是“C 级”康乃馨的概率为 $(0.4+1.2+2.4)\times 0.05=0.2$

随机变量 X 的可能取值有 $20,25,30,35,40$.

且 $P(X=20)=0.2\times 0.2=0.04$;

$P(X=25)=0.2\times 0.5+0.5\times 0.2=0.2$;

$P(X=30)=0.5\times 0.5+0.3\times 0.2+0.2\times 0.3=0.37$;

$P(X=35)=0.3\times 0.5+0.5\times 0.3=0.3$;

$P(X=40)=0.3\times 0.3=0.09$.

所以随机变量 X 的分布列为:

X	20	25	30	35	40
P	0.04	0.2	0.37	0.3	0.09

故随机变量 X 的数学期望 $E(X)=20\times 0.04+25\times 0.2+30\times 0.37+35\times 0.3+40\times 0.09=31$.

（Ⅲ）与旧的发芽率数据的方差相比,技术改进后发芽率数据的方差变大了.

设原发芽率为 δ,调整后发芽率为 Y

则原发芽率方差为$D(\delta)$

则$Y=1.1\delta$

$\therefore D(Y)=1.21D(\delta)>D(\delta)$

所以与旧的发芽率数据的方差相比,技术改进后发芽率数据的方差变大了.

19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$,右焦点为$F$,点$A(a,0)$,且$|AF|=1$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程;

（Ⅱ）过点F的直线l（不与x轴重合）交椭圆C于点M,N,直线MA,NA分别与直线$x=4$相交于点P,Q.求$\angle PFQ$的大小.

【解析】

（Ⅰ）由题知,$\begin{cases}|AF|=a-c=1\\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\\ c=1\end{cases}$

所以椭圆C的方程为:$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）由题知,直线l的斜率不为 0,不妨设直线$l:x=ty+1$,

设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

联立椭圆与直线方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=ty+1\end{cases}$,消去$x$得:$(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$,

易知:$\Delta=(6t)^2-4(3t^2+4)(-9)=144(1+t^2)>0$

$y_1+y_2=\dfrac{-6t}{3t^2+4}$, $y_1y_2=\dfrac{-9}{3t^2+4}$

$x_1+x_2=ty_1+1+ty_2+1$

$=t(y_1+y_2)+2$

$=\dfrac{8}{3t^2+4}$

$x_1\cdot x_2=(ty_1+1)(ty_2+1)$

$=t^2y_1y_2+t(y_1+y_2)+1$

$=\dfrac{-9m^2}{3t^2+4}+\dfrac{-6m^2}{3t^2+4}+1$

$=\dfrac{4-12t^2}{3t^2+4}$

直线 AM 的方程为: $y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$,

令 $x=4$,可得: $y_p=\dfrac{2y_1}{x_1-2}$,

所以 $P(4,\dfrac{2y_1}{x_1-2})$.

同理:直线 AN 的方程为: $y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$, $Q(4,\dfrac{2y_2}{x_2-2})$,

$\overrightarrow{FP}=(3,\dfrac{2y_1}{x_1-2})$, $\overrightarrow{FQ}=(3,\dfrac{2y_2}{x_2-2})$,

$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=9+\dfrac{4y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$$=9+\frac{4y_1y_2}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$=9+\frac{4\times(-9)}{4-12t^2-2\times 8+4(3t^2+4)}$$

$$=9-9=0$$

所以 $FP\perp FQ$,所以 $\angle PFQ=90^\circ$.

20. （本小题满分 15 分）

设函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x+\cos x$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）已知函数 $f(x)$ 为偶函数,求 a 的值;

（Ⅱ）若 $a=1$,证明:当 $x>0$ 时, $f(x)>2$;

（Ⅲ）若 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 内有两个不同的零点,求 a 的取值范围.

【解析】

（Ⅰ）函数 $f(x)$ 为偶函数,

所以 $f(-\pi)=f(\pi)$,即 $a\mathrm{e}^{-\pi}-1=a\mathrm{e}^{\pi}-1$,

解得 $a=0$.

验证知 $a=0$ 符合题意.

（Ⅱ） $f'(x)=\mathrm{e}^x-\sin x$.

由 $x>0$,得 $\mathrm{e}^x>1$, $\sin x\in[-1,1]$,

则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\sin x>0$,即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

故 $f(x)>f(0)=2$,即 $f(x)>2$.

（III）由 $f(x)=ae^x+\cos x=0$，得 $a=-\dfrac{\cos x}{e^x}$.

设函数 $h(x)=-\dfrac{\cos x}{e^x}$, $x\in[0,\pi]$,

则 $h'(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}$.

令 $h'(x)=0$，得 $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

随着 x 变化，$h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表所示:

x	$(0,\dfrac{3\pi}{4})$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$(\dfrac{3\pi}{4},\pi)$
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	↗	极大值	↘

所以 $h(x)$ 在 $(0,\dfrac{3\pi}{4})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{3\pi}{4},\pi)$ 上单调递减.

又因为 $h(0)=-1$, $h(\pi)=e^{-\pi}$, $h(\dfrac{3\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$,

所以当 $a\in[e^{-\pi},\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}})$ 时，方程 $a=-\dfrac{\cos x}{e^x}$ 在区间 $[0,\pi]$ 内有两个不同解，且在区间 $[0,\dfrac{3\pi}{4})$ 与 $(\dfrac{3\pi}{4},\pi]$ 上各有一个解.

即所求实数 a 的取值范围为 $[e^{-\pi},\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}})$.

21.（本小题满分 14 分）

设 N 为正整数,区间 $I_k=[a_k,a_k+1]$(其中 $a_k\in\mathbf{R}$,$k=1,2,\cdots,N$)同时满足下列两个条件:

①对任意 $x\in[0,100]$,存在 k 使得 $x\in I_k$;

②对任意 $k\in\{1,2,\cdots,N\}$,存在 $x\in[0,100]$,使得 $x\notin I_i$(其中 $i=1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,N$).

（Ⅰ）判断 $a_k(k=1,2,\cdots,N)$ 能否等于 $k-1$ 或 $\dfrac{k}{2}-1$;（结论不需要证明）

（Ⅱ）求的 N 最小值;

（III）研究 N 是否存在最大值,若存在,求出 N 的最大值;若不存在,说明理由.

【解析】

（Ⅰ）a_k 可以等于 $k-1$,但 a_k 不能等于 $\dfrac{k}{2}-1$.

（Ⅱ）记 $b-a$ 为区间 $[a,b]$ 的长度,

则区间 $[0,100]$ 的长度为 100,I_k 的长度为 1.

由①,得 $N\geq 100$.

又因为 $I_1=[0,1],I_2=[1,2],\cdots,I_{100}=[99,100]$ 显然满足条件①,②.

所以 N 的最小值为 100.

（III）N 的最大值存在,且为 200.解答如下:

（1）首先,证明 $N\leq 200$.

由②,得 $I_1,I_2,\cdots I_N$ 互不相同,且对于任意 k,$I_k\cap[0,100]\neq\varnothing$.

不妨设 $a_1<a_2<\cdots a_n<\cdots$.

如果 $a_2\leq 0$,那么对于条件②,当 $k=1$ 时,不存在 $x\in[0,100]$,使得 $x\notin I_i(i=2,3,\cdots,N)$.

这与题意不符,故$a_2>0$.

如果$a_{k+1}\le a_{k-1}+1$,那么$I_k\subseteq I_{k-1}\cup I_{k+1}$,

这与条件②中“存在$x\in[0,100]$,使得$x\notin I_i(i=1,2,k-1,k+1,\cdots,N)$”矛盾,

故$a_{k+1}>a_{k-1}+1$.

所以$a_4>a_2+1>1,a_6>a_4+1>2,\cdots,a_{200}>a_{198}+1>99$,

则$a_{200}+1>100$.

故$I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_{200}\supseteq[0,100]$.

若存在I_{201},这与条件②中“存在$x\in[0,100]$,使得$x\notin I_i(i=1,2,\cdots,200)$”矛盾,

所以$N\le 200$.

（2）给出$N=200$存在的例子.

令$a_k=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{100}{199}(k-1)$,其中$k=1,2,\cdots,200$,即$a_1,a_2,\cdots a_{200}$为等差数列,公差$d=\dfrac{100}{199}$.

由$d<1$,知$I_k\cap I_{k+1}\ne\varnothing$,则易得$I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_{200}=[-\dfrac{1}{2},\dfrac{201}{2}]$,

所以$I_1,I_2,\cdots,I_{200}$满足条件①.

又公差$d=\dfrac{100}{199}>\dfrac{1}{2}$,

所以$\dfrac{100}{199}(k-1)\in I_k$,$\dfrac{100}{199}(k-1)\notin I_i(i=1,2,\cdots k-1,k+1,\cdots,N)$.（注:$\dfrac{100}{199}(k-1)$

为区间I_k的中点对应的数）

所以$I_1,I_2,\cdots,I_{200}$满足条件②.

综合（1）（2）可知N的最大值存在,且为200.