2020年北京市西城区高三一模数学考试逐题解析

2020.4

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，满分150分，考试时长120分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第I卷（选择题　共40分）

一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设集合 $A=\{x\mid x<3\}$, $B=\{x\mid x<0,或x>2\}$,则 $A\cap B=$

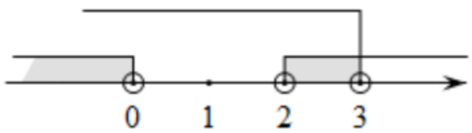
（A）$(-\infty,0)$　　（B）$(2,3)$

（C）$(-\infty,0)\cup(2,3)$　　（D）$(-\infty,3)$

【答案】C

【解析】本题考查集合的运算.

$A=\{x\mid x<3\}, B=\{x\mid x<0,或x>2\}$



由集合的运算法则可知: $A\cap B=\{x\mid x<0或2<x<3\}$

故选C.

2. 若复数 $z=(3-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$,则 $|z|=$

（A） $2\sqrt{2}$　　（B） $2\sqrt{5}$

（C） $\sqrt{10}$　　（D） 20

【答案】B

【解析】本题考查复数.

$z=(3-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=3+3\mathrm{i}-\mathrm{i}-\mathrm{i}^2=4+2\mathrm{i}$

$|z|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

故选 B.

3. 下列函数中,值域为 $\mathbf{R}$ 且为奇函数的是

（A） $y=x+2$　　（B） $y=\sin x$

（C） $y=x-x^3$　　（D） $y=2^x$

【答案】C

【解析】本题考查函数奇偶性和值域.

A 选项,非奇非偶函数,值域为 $\mathbf{R}$;

B 选项,奇函数,值域为 $[-1,1]$;

C 选项, $f(-x)=-f(x)$,故为奇函数,且值域为 $\mathbf{R}$;

D 选项,非奇非偶函数,值域为 $(0,+\infty)$.

故选 C.

4. 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$a_3=2,a_1+a_4=5$,则$S_6=$

（A）10　　（B）9

（C）8　　（D）7

【答案】B

【解析】本题考查等差数列.

设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1,公差为d.

$\begin{cases}a_1+2d=2\\2a_1+3d=5\end{cases}$,解得$\begin{cases}a_1=4\\d=-1\end{cases}$,$S_6=6\times4+\dfrac{6\times5\times(-1)}{2}=9$

故选 B.

5. 设$A(2,-1),B(4,1)$,则以线段AB为直径的圆的方程是

（A）$(x-3)^2+y^2=2$　　（B）$(x-3)^2+y^2=8$

（C）$(x+3)^2+y^2=2$　　（D）$(x+3)^2+y^2=8$

【答案】A

【解析】本题考查圆的标准方程.

由题意可知,AB为直径,

所以圆心为AB中点$(3,0)$.

且半径为$r=\dfrac{|AB|}{2}=\dfrac{\sqrt{(2-4)^2+(-1-1)^2}}{2}=\sqrt{2}$,

所以圆方程为$(x-3)^2+y^2=2$.

故选 A.

6. 设a,b,c为非零实数,且$a>c,b>c$,则

（A） $a+b>c$　　（B） $ab>c^2$

（C） $\dfrac{a+b}{2}>c$　　（D） $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{2}{c}$

【答案】C

【解析】本题考查不等式.

当$a=-1,b=-2,c=-3$时,$a>c,b>c$,但$a+b=c$,A 选项错误;

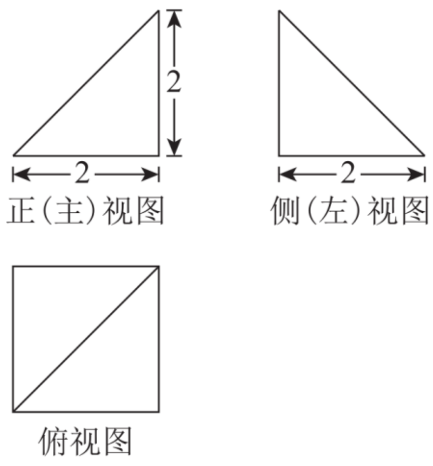
当$a=-1,b=-2,c=-3$时,$a>c,b>c$,但$ab<c^2$,B 选项错误;

因为$a>c,b>c$,所以$a+b>2c$,即$\dfrac{a+b}{2}>c$,C 选项正确;

当$a=-1,b=-2,c=-3$时,$a>c,b>c$,但$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\dfrac{2}{c}$,D 选项错误.

故选 C.

7. 某四棱锥的三视图如图所示,记S为此棱锥所有棱的长度的集合,则



（A） $2\sqrt{2}\notin S$,且$2\sqrt{3}\notin S$

（B） $2\sqrt{2}\notin S$,且$2\sqrt{3}\in S$

（C） $2\sqrt{2}\in S$,且$2\sqrt{3}\notin S$

（D） $2\sqrt{2}\in S$,且$2\sqrt{3}\in S$

【答案】D

【解析】本题考查三视图.

四棱锥的直观图如图所示:由图可知,

$AB=BC=CD=AD=PA=2$;

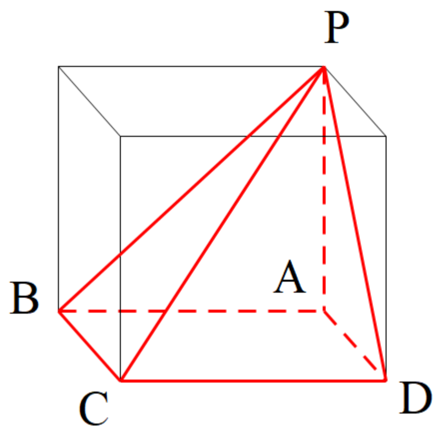
$PB=PD=2\sqrt{2}$;

$PC=2\sqrt{3}$;

所以 $S=\{2,2\sqrt{2},2\sqrt{3}\}$.

因此 $2\sqrt{2}\in S$,且 $2\sqrt{3}\in S$,

故选 D.



8. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,则"$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$"是"$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线"的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】本题考查平面向量.

当两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同时, $\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\cos 0^\circ=1$,

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2}=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

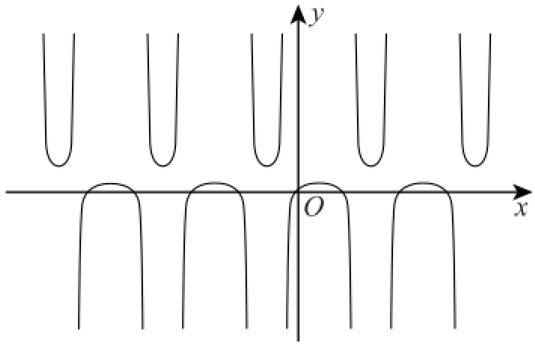
当两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反时, $\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\cos 180^\circ=-1$,

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{(|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|)^2}=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$

所以"$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$"是"$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线"的充分而不必要条件.

故选 A.

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+2\sin x}$ 的部分图象如图所示,将此图象分别作以下变换,那么变换后的图象可以与原图象重合的变换方式有



①绕着 x 轴上一点旋转 180°;

②沿 x 轴正方向平移;

③以 x 轴为轴作轴对称;

④以 x 轴的某一条垂线为轴作轴对称.

（A）①③　　（B）③④

（C）②③　　（D）②④

【答案】D

【解析】本题考查三角函数的图象和性质.

由题可得:定义域内任意 x, $f(x+2\pi)=\dfrac{\sin(x+2\pi)}{1+2\sin(x+2\pi)}=\dfrac{\sin x}{1+2\sin x}=f(x)$,

所以 2π 为 $f(x)$ 的周期,故可沿 x 轴正方向平移 $2k\pi(k\in\mathbf{N}^*)$ 单位后,与原图象重合,②正确;

又因为 $y=\sin x$, $y=1+2\sin x$ 都关于 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 对称,

所以 $f(x)$ 的图象关于 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 对称,④正确;

由函数定义可得: $f(x)$ 图象不可能关于 x 轴对称,③错误;

由图易得函数图象不关于 $(a,0),a\in\mathbf{R}$ 对称,①错误.

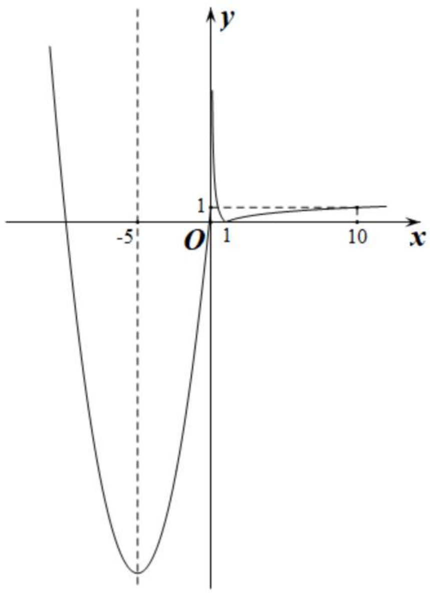
故选 D.

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+10x+1, & x\le 0,\\ |\lg x|, & x>0.\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=a(a\in\mathbf{R})$ 有四个实数解 $x_i(i=1,2,3,4)$,其中 $x_1<x_2<x_3<x_4$,则 $(x_1+x_2)(x_3-x_4)$ 的取值范围是

（A）$(0,101]$　　（B）$(0,99]$

（C）$(0,100]$　　（D）$(0,+\infty)$

【答案】B



【解析】本题考查函数的图象及性质.

$f(x)=a$ 有四个实数解 $x_1<x_2<x_3<x_4$, 即 $y=f(x)$ 与 $y=a$ 的图象有四个不同的交点.

所以 $a\in(0,1]$.

由题可得 $x_1+x_2=-10$. $x_3\in[\frac{1}{10},1)$, $x_4\in(1,10]$.

且 $|\lg x_3|=|\lg x_4|$, 即 $-\lg x_3=\lg x_4$,所以 $\lg x_3x_4=0$,

即 $x_3x_4=1, x_3=\frac{1}{x_4}$.

所以 $x_3-x_4<0, x_3-x_4=\frac{1}{x_4}-x_4$.

又因为 $y=\frac{1}{x}-x$ 在 $(0,+\infty)$ 为减函数,所以 $\frac{1}{x_4}-x_4\in[-\frac{99}{10},0)$.

所以 $(x_1+x_2)(x_3-x_4)=-10(x_3-x_4)\in(0,99]$.

故选 B.

第 II 卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 在 $(x+\frac{1}{x})^6$ 的展开式中,常数项为______.（用数字作答）

【答案】20

【解析】本题考查二项式定理.

$T_{r+1}=C_6^r\cdot x^{6-r}\cdot(\frac{1}{x})^r=C_6^r\cdot x^{6-2r}$,

令 $6-2r=0$,即 $r=3$,

所以常数项为 $T_4=C_6^3\cdot x^0=20$.

12. 若向量 $\boldsymbol{a}=(x^2,2),\boldsymbol{b}=(1,x)$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<3$,则实数 x 的取值范围是______.

【答案】$(-3,1)$

【解析】本题考查平面向量数量积.

因为向量 $\boldsymbol{a}=(x^2,2),\boldsymbol{b}=(1,x)$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x^2+2x<3$.

整理得到 $(x+3)(x-1)<0$,

所以 x 的取值范围是 $(-3,1)$.

13. 设双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$,则该双曲线的离心率为

______.

【答案】$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】本题考查双曲线.

由双曲线方程可知$a=2$.

因为双曲线的一条渐近线方程为$y=\dfrac{b}{a}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$,

所以$b=\sqrt{2}$.

又因为在双曲线中$c^2=a^2+b^2$,

所以$c=\sqrt{6}$.

故双曲线的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

14. 函数$f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$的最小正周期为______;若函数$f(x)$在区间$(0,\alpha)$上单调递增,则$\alpha$的最大值为______.

【答案】$\pi;\dfrac{\pi}{8}$

【解析】本题考查三角函数.

由题可知,函数$f(x)$的最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

又因为函数$f(x)$在区间$(0,\alpha)$上单调递增,

所以$x\in(0,\alpha)$,

$2x+\dfrac{\pi}{4}\in(\dfrac{\pi}{4},2\alpha+\dfrac{\pi}{4})$,

所以只需满足$2\alpha+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}$,即$\alpha\le\frac{\pi}{8}$,

所以α的最大值为$\frac{\pi}{8}$.

15. 在一次体育水平测试中,甲、乙两校均有100名学生参加,其中:甲校男生成绩的优秀率为70%,女生成绩的优秀率为50%;乙校男生成绩的优秀率为60%,女生成绩的优秀率为40%.对于此次测试,给出下列三个结论:

①甲校学生成绩的优秀率大于乙校学生成绩的优秀率;

②甲、乙两校所有男生成绩的优秀率大于甲、乙两校所有女生成绩的优秀率;

③甲校学生成绩的优秀率与甲、乙两校所有学生成绩的优秀率的大小关系不确定.

其中,所有正确结论的序号是______.

【答案】②③

【解析】本题考查统计基础.

由题可设,甲乙两校男女生人数如下:

	男生	女生
甲校	a	b
乙校	c	d

其中$a,b,c,d\in[0,100],a,b,c,d\in\mathbf{N},a+b=c+d=100$.

甲校优秀率设为x_1,乙校优秀率设为x_2,全部优秀率设为x.

所以$x_1=\frac{0.7a+0.5b}{100}=\frac{50+0.2a}{100}$,$x_2=\frac{0.6c+0.4d}{100}=\frac{40+0.2c}{100}$,

$x=\dfrac{0.7a+0.5b+0.6c+0.4d}{200}=\dfrac{90+0.2a+0.2c}{200}$.

所以 $x_1-x_2=\dfrac{10+0.2(a-c)}{100}$.

当 $a-c<-50$ 时, $0.2(a-c)<-10, x_1-x_2<0, x_1<x_2$.

当 $a-c>-50$ 时, $0.2(a-c)>-10, x_1-x_2>0, x_1>x_2$.

当 $a-c=-50$ 时, $0.2(a-c)=-10, x_1-x_2=0, x_1=x_2$.

故①错误.

男生优秀率 $x_3=\dfrac{0.7a+0.6c}{a+c}=0.6+\dfrac{0.1a}{a+c}\geq 0.6$

女生优秀率 $x_4=\dfrac{0.5b+0.4d}{b+d}=0.4+\dfrac{0.1b}{b+d}\leq 0.4+\dfrac{0.1b}{b}=0.5$.

所以甲乙两校男生优秀率高于女生优秀率.

故②正确.

$x_1-x=\dfrac{10+0.2(a-c)}{200}$.

当 $a-c<-50$ 时, $0.2(a-c)<-10, x_1-x<0, x_1<x$.

当 $a-c>-50$ 时, $0.2(a-c)>-10, x_1-x>0, x_1>x$.

当 $a-c=-50$ 时, $0.2(a-c)=-10, x_1-x=0, x_1=x$.

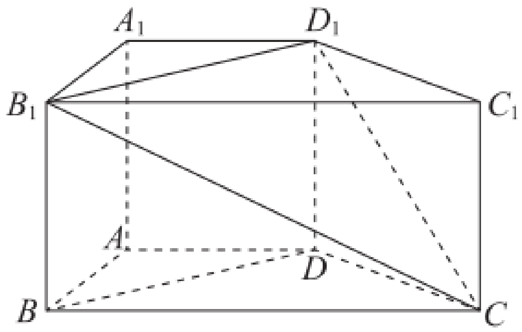
故③正确.

综上所述,②③正确.

三、解答题：共 6 小题，共 85 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

16. （本小题满分 14 分）

如图,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1\perp$ 平面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 满足 $AD//BC$,且 $AB=AD=AA_1=2$, $BD=DC=2\sqrt{2}$.



（Ⅰ）求证: $AB\perp$ 平面 ADD_1A_1;

（Ⅱ）求直线 AB 与平面 B_1CD_1 所成角的正弦值.

【解析】

（Ⅰ）因为在底面 $ABCD$ 中,

$AB=AD=2, BD=2\sqrt{2}$,

所以 $AB^2+AD^2=BD^2$,

即 $AB\perp AD$.

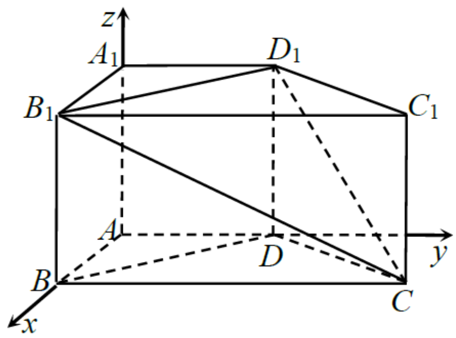
因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$, $AB\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AA_1\perp AB$,

又因为 $AA_1\cap AD=A$, AA_1, $AD\subset$ 平面 ADD_1A_1,

所以 $AB\perp$ 平面 ADD_1A_1.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 AB, AD, AA_1 两两垂直,故分别以 AB, AD, AA_1 为 x 轴, y 轴, z 轴,如图建立空间直角坐标系,



在底面 $ABCD$ 中,$\triangle ABD$ 为等腰直角三角形, $AD//BC$,

所以 $\angle CBD=\angle ADB=45^\circ$,

又因为 $BD=DC=2\sqrt{2}$,

所以$\triangle BCD$为等腰直角三角形,即$BC=\sqrt{BD^2+DC^2}=4$.

则$A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$C(2,4,0)$,$B_1(2,0,2)$,$D_1(0,2,2)$,

所以$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{B_1C}=(0,4,-2)$,$\overrightarrow{B_1D_1}=(-2,2,0)$,

设平面B_1CD_1的法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{B_1C}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{B_1D_1}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$,得$\begin{cases}4y-2z=0,\\ -2x+2y=0,\end{cases}$

令$y=1$,得$\boldsymbol{n}=(1,1,2)$.

设直线AB与平面B_1CD_1所成的角为θ,

则$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}>|=|\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}|=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$,

所以直线AB与平面B_1CD_1所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

17.（本小题满分 14 分）

已知$\triangle ABC$满足______,且$b=\sqrt{6},A=\dfrac{2\pi}{3}$,求$\sin C$的值及$\triangle ABC$的面积.

从①$B=\dfrac{\pi}{4}$,②$a=\sqrt{3}$,③$a=3\sqrt{2}\sin B$这三个条件中选一个,补充到上面问题中,并完成解答.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

【解析】（不可以选择②作为补充条件.）

选①$B=\dfrac{\pi}{4}$时,

在$\triangle ABC$中，$A+B+C=\pi$，

所以$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$

$=\sin(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

所以$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=3$，

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{9-3\sqrt{3}}{4}$.

选③$a=3\sqrt{2}\sin B$时，

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，且$a=3\sqrt{2}\sin B$，

所以$\sin^2 B=\frac{b\sin A}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，

因为在$\triangle ABC$中，$\sin B>0$，

所以$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为$A+B+C=\pi$，$A=\frac{2\pi}{3}$，

所以$B\in(0,\frac{\pi}{3})$，则$B=\frac{\pi}{4}$.

$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$

$=\sin(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$a=3\sqrt{2}\sin B=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$.

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{9-3\sqrt{3}}{4}$.

18.（本小题满分 14 分）

2019 年底,北京 2022 年冬奥组委会启动志愿者全球招募,仅一个月内报名人数便突破 60 万,其中青年学生约有 50 万人.现从这 50 万青年学生志愿者中,按男女分层抽样随机选取 20 人进行英语水平测试,所得成绩（单位:分）统计结果用茎叶图记录如下:

男		女
6	4	7
3	5	7 9
0 3 8	6	5 6
1 4	7	1 3 5 6 8
5	8	1 8

（Ⅰ）试估计在这 50 万青年学生志愿者中,英语测试成绩在 80 分以上的女生人数;

（Ⅱ）从选出的 8 名男生中随机抽取 2 人,记其中测试成绩在 70 分以上的人数为 X ,求 X 的分布列和数学期望;

（Ⅲ）为便于联络,现将所有的青年学生志愿者随机分成若干组（每组人数不少于 5000）,并在每组中随机选取m个人作为联络员,要求每组的联络员中至少有 1 人的英语测试成绩在 70 分以上的概率大于90%.根据图表中数据,以频率作为概率,给出m的最小值.（结论不要求证明）

【解析】

（Ⅰ）由图表可知,测试成绩在 80 分以上的女生有 2 人,占比为$\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$,

故在这 50 万青年学生志愿者中,英语测试成绩在 80 分以上的女生约为$50\times\frac{1}{10}=5$万人.

（Ⅱ）由图表知,选取的 8 名男生中,成绩在 70 分以上的有 3 人,70 分及其以下的有 5 人,

由题意,随机变量 X 的所有可能取值为:0,1,2

且 $P(X=0)=\frac{C_5^2\cdot C_3^0}{C_8^2}=\frac{5}{14}$;$P(X=1)=\frac{C_5^1\cdot C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$;$P(X=2)=\frac{C_5^0\cdot C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$.

所以随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

所以$E(X)=0\times\frac{5}{14}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$.

（III）m 的最小值为 4.

解析:在抽取的 20 人中英语成绩在 70 分以上者共计 10 人,所以在这 20 人中随机抽取一人,其英语成绩在 70 分以上的概率为$\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.在超过 5000 人的青年志愿者中抽取$m$人,其英语成绩在 70 分以上至少一人为事件$A$,则$P(\bar{A})=C_m^m\cdot(\frac{1}{2})^m<0.1=\frac{1}{10}$,$m\in\mathbf{N}^*$,由此得$m\geq 4$,所以$m$的最小值为 4.

19.（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=a\ln x+x^2-(a+2)x$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若曲线$y=f(x)$在点$(2,f(2))$处切线的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$,求a的值;

（Ⅱ）已知导函数 $f'(x)$ 在区间$(1,\mathrm{e})$上存在零点,证明:当$x\in(1,\mathrm{e})$时,$f(x)>-\mathrm{e}^2$.

【解析】

（Ⅰ）由题意,得 $f'(x)=\dfrac{a}{x}+2x-(a+2)$

则 $f'(2)=\dfrac{a}{2}+4-(a+2)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$,解得 $a=2$.

（Ⅱ） $f'(x)=\dfrac{a}{x}+2x-(a+2)=\dfrac{(2x-a)(x-1)}{x}$,其中 $x\in(1,\mathrm{e})$.

令 $f'(x)=\dfrac{(2x-a)(x-1)}{x}=0$,得 $x=1$ 或 $x=\dfrac{a}{2}$.

由导函数 $f'(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上存在零点,得 $\dfrac{a}{2}\in(1,\mathrm{e})$,即 $a\in(2,2\mathrm{e})$.

随着 x 变化, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表所示:

x	$(1,\dfrac{a}{2})$	$\dfrac{a}{2}$	$(\dfrac{a}{2},\mathrm{e})$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $(1,\dfrac{a}{2})$ 上单调递减,在 $(\dfrac{a}{2},\mathrm{e})$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上存在最小值 $f(\dfrac{a}{2})=a\ln(\dfrac{a}{2})-\dfrac{a^2}{4}-a$.

设 $g(x)=2x\ln x-x^2-2x$, $x\in(1,\mathrm{e})$,则 $g(\dfrac{a}{2})=f(\dfrac{a}{2})$, $\dfrac{a}{2}\in(1,\mathrm{e})$.

所以 $g'(x)=2\ln x-2x$.

由 $x\in(1,\mathrm{e})$,得 $2\ln x\in(0,2)$, $2x\in(2,2\mathrm{e})$,则 $g'(x)=2\ln x-2x<0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递减.

所以 $g(x)>g(\mathrm{e})=-\mathrm{e}^2$,即 $g(\frac{a}{2})=f(\frac{a}{2})>-\mathrm{e}^2$

故当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时, $f(x)>-\mathrm{e}^2$

20. （本小题满分 15 分）

设椭圆 $E:\frac{x^2}{2}+y^2=1$,直线 l_1 经过点 $M(m,0)$,直线 l_2 经过点 $N(n,0)$,直线 l_1 // 直线 l_2,且直线 l_1,l_2 分别与椭圆 E 相交于 A,B 两点和 C,D 两点.

（Ⅰ）若 M,N 分别为椭圆 E 的左、右焦点,且直线 $l_1\perp x$ 轴,求四边形 $ABCD$ 的面积;

（Ⅱ）若直线 l_1 的斜率存在且不为 0,四边形 $ABCD$ 为平行四边形,求证: $m+n=0$;

（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下,判断四边形 $ABCD$ 能否为矩形,说明理由.

【解析】

（Ⅰ）由题知, $M(-1,0)$, $N(1,0)$

又因为直线 l_1 // 直线 l_2 且 $l_1\perp x$ 轴,

所以 $l_1: x=-1, l_2: x=1$.

因为直线 l_1,l_2 分别与椭圆 E 相交于 A,B 两点和 C,D 两点,

所以 $A(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}),B(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}),C(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}),D(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$

此时四边形 $ABCD$ 为矩形,

所以 $S_{▱ABCD}=|AB|\times|AD|=\sqrt{2}\times 2=2\sqrt{2}$.

（Ⅱ）因为直线l_1 // 直线l_2且直线l_1的斜率存在且不为0，

所以设直线l_1与直线l_2的斜率为k.

则$l_1: y=k(x-m)$

$$\begin{cases} y=k(x-m) \\ x^2+2y^2=2 \end{cases} \Rightarrow (1+2k^2)x^2-4k^2mx+2k^2m^2-2=0$$

$$\Delta=(4k^2m)^2-4(1+2k^2)(2k^2m^2-2)=8(1+2k^2-k^2m^2)>0$$

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

$$x_1+x_2=\frac{4k^2m}{1+2k^2}, x_1\cdot x_2=\frac{2k^2m^2-2}{1+2k^2}$$

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{8(1+2k^2-k^2m^2)}}{1+2k^2}$$

同理,设$l_2: y=k(x-n)$

$$|CD|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{8(1+2k^2-k^2n^2)}}{1+2k^2}$$

若四边形为平行四边形,则$|AB|=|CD|$,

$$\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{8(1+2k^2-k^2m^2)}}{1+2k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{8(1+2k^2-k^2n^2)}}{1+2k^2}$$

因为$k\neq 0$,整理得到:$m^2=n^2$

即$(m+n)(m-n)=0$

又因为$ABCD$是四边形,

所以$m\neq n$

即$m+n=0$

（III）法一:四边形 $ABCD$ 不能为矩形,理由如下:

点 O 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离分别为 $\frac{|km|}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{|kn|}{\sqrt{1+k^2}}$,由（II）知 $k \neq 0$ 且 $m=-n$,

所以点 O 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离相等.

根据椭圆的对称性,故而原点 O 是平行四边形 $ABCD$ 的对称中心.

假设平行四边形是矩形,则 $|OA|=|OB|$,

那么 $\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}=\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}$,则 $x_1^{\ 2}+1-\frac{x_1^{\ 2}}{2}=x_2^{\ 2}+1-\frac{x_2^{\ 2}}{2}$,

所以 $x_1=x_2$.

这时直线 $l_1 \perp x$ 轴.

这与直线 l_1 的斜率存在相矛盾,所以假设不成立.

所以四边形 $ABCD$ 不能为矩形.

法二:四边形 $ABCD$ 不能为矩形,理由如下:

在（II）的条件下,可知 B,D 关于原点对称,

因为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,所以 $D(-x_2,-y_2)$

$$k_{AD}=\frac{y_1-(-y_2)}{x_1-(-x_2)}=\frac{k(x_1+x_2-2m)}{x_1+x_2}=\frac{k(\frac{4k^2m}{1+2k^2}-2m)}{\frac{4k^2m}{1+2k^2}}=\frac{\frac{-2km}{1+2k^2}}{\frac{4k^2m}{1+2k^2}}=-\frac{1}{2k}$$

所以 $k_{AB}\cdot k_{AD}=k\cdot(-\frac{1}{2k})=-\frac{1}{2}\neq -1$

即平行四边形的邻边 AB,AD 不垂直,

所以四边形 $ABCD$ 不能为矩形.

21．（本小题满分 14 分）

对于正整数 n，如果 $k(k\in\mathbf{N}^*)$ 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 满足 $1\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_k\le n$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_k=n$，则称数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 为 n 的一个"正整数分拆".记 $a_1,a_2,\cdots a_k$ 均为偶数的"正整数分拆"的个数为 f_n，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 均为奇数的"正整数分拆"的个数为 g_n.

（Ⅰ）写出整数 4 的所有"正整数分拆";

（Ⅱ）对于给定的整数 $n(n\ge 4)$，设 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 是 n 的一个"正整数分拆"，且 $a_1=2$，求 k 的最大值;

（Ⅲ）对所有的正整数 n，证明：$f_n\le g_n$；并求出使得等号成立的 n 的值.

（注：对于 n 的两个"正整数分拆" $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 与 $(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，当且仅当 $k=m$ 且 $a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_k=b_m$ 时，称这两个"正整数分拆"是相同的.）

【解析】

（Ⅰ）$(1,1,1,1)$，$(1,1,2)$，$(1,3)$，$(2,2)$，(4).

（Ⅱ）由题意，知 $2=a_1\le a_2\le\cdots\le a_k\le n$，且 $a_1+a_2+\cdots a_k=n$，

得 $n=a_1+a_2+\cdots a_k\ge 2k$，即 $k\le\dfrac{n}{2}$.

所以当 n 是偶数时，k 的最大值是 $\dfrac{n}{2}$（此时，$\underbrace{(2,2,\cdots,2)}_{\text{共有}k\text{个}2}$ 是 n 的一个"正整数分拆"）；

当 n 是奇数时，k 的最大值是 $\dfrac{n-1}{2}$（此时，$\underbrace{(2,2,\cdots,2,3)}_{\text{共有}k-1\text{个}2}$ 是 n 的一个"正整数分拆"）.

（Ⅲ）当 n 为奇数时，

由题意，得 $f_n=0$；且 $\underbrace{(1,1,\cdots,1)}_{\text{共有n个}1}$ 是 n 的一个各位数字均为奇数的"正整数分拆"，

所以 $g_n>0$，故 $f_n<g_n$.

当 n 为偶数时,

由 (n) 是各位数字均为偶数的“正整数分拆”, $\underbrace{(1,1,\cdots,1)}_{共有n个1}$ 是各位数字均为奇数的“正整数分拆”,得 $f_n>0,g_n>0$.

①当 $n=2$ 时, n 的“正整数分拆”只有 $(1,1)$ 和 (2) ,所以 $f_2=g_2=1$;

②当 $n=4$ 时,由（Ⅰ）知, $f_4=g_4=2$;

③当 n 为大于 4 的偶数时,

因为对于 n 的任意一个各位数字均为偶数的“正整数分拆” $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$,都存在一个与之对应的各位数字均为奇数的“正整数分拆” $(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{共有k个1},a_1-1,a_2-1,\cdots,a_k-1)$.

且当 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 不同时,其对应的 $(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{共有k个1},a_1-1,a_2-1,\cdots,a_k-1)$ 也不相同,

所以 $f_n\le g_n$.

又因为在上述对应关系下,各位数字均为奇数的“正整数分拆” $(3,n-3)$ 不存在与之对应的各位数字都是偶数的“正整数分拆”,（注:因为 $n\ge 6$,所以 $(3,n-3)$ 有意义）

所以 $f_n<g_n$.

综上,对所有的正整数 n , $f_n\le g_n$;当且仅当 $n=2$ 或 4 时等号成立.