2020 年北京市高考数学考试逐题解析

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$， $B=\{x\mid 0<x<3\}$，则 $A\bigcap B=$

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{-1,1,2\}$　　D. $\{1,2\}$

【答案】D

【解析】

因为 $A=\{-1,0,1,2\}$， $B=\{x\mid 0<x<3\}$，

所以 $A\bigcap B=\{1,2\}$，

故选 D.

2. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(1,2)$，则 $\mathrm{i}\cdot z=$

A. $1+2\mathrm{i}$　　B. $-2+\mathrm{i}$

C. $1-2\mathrm{i}$　　D. $-2-\mathrm{i}$

【答案】B

【解析】

因为复数 z 对应的点的坐标是 $(1,2)$，

所以 $z=1+2\mathrm{i}$， 所以 $\mathrm{i}\cdot z=\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})=-2+\mathrm{i}$，

故选 B.

3. 在$(\sqrt{x}-2)^5$的展开式中，x^2的系数为

A. -5　　B. 5

C. -10　　D. 10

【答案】C

【解析】

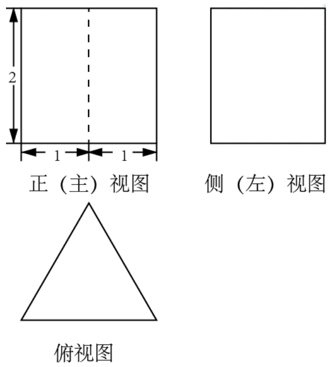
$(\sqrt{x}-2)^5$展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_5^r(\sqrt{x})^{5-r}\cdot(-2)^r=C_5^r(-2)^r x^{\frac{5-r}{2}}$，

当$\frac{5-r}{2}=2$，即$r=1$时，$T_2=C_5^1(-2)^1x^2=-10x^2$，

所以x^2的系数为-10，

故选C.

4. 某三棱柱的底面为正三角形，其三视图如图所示，该三棱柱的表面积为

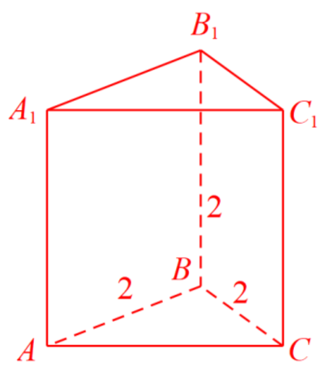


A. $6+\sqrt{3}$　　B. $6+2\sqrt{3}$

C. $12+\sqrt{3}$　　D. $12+2\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】



三棱柱的直观图如图所示：

其为底面棱长、侧棱长均为2的正三棱柱.

其上下底面是2个边长为2的全等正三角形，

侧面是3个边长为2的全等正方形.

设三角形ABC的面积为S_1，正方形ABB_1A_1的面积为S_2，

所以其表面积为：

$$S=2S_1+3S_2=2\times\frac{1}{2}\times|AB|\times|BC|\times\sin\angle ABC+3\times|AA_1|\times|AB|$$

$$=2\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3\times2\times2$$

$$=2\sqrt{3}+12$$

故选 D.

5. 已知半径为1的圆经过点$(3,4)$，则其圆心到原点的距离的最小值为

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

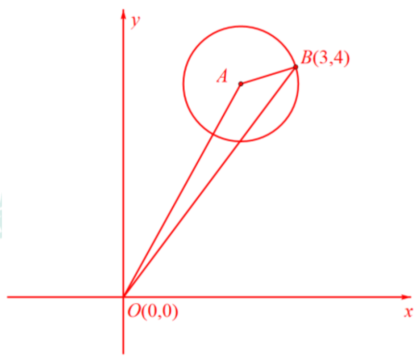
【答案】A

【解析】

方法一：

设该圆的圆心为A，$B(3,4)$，

因为$|OB|=5$且$|AB|=1$，

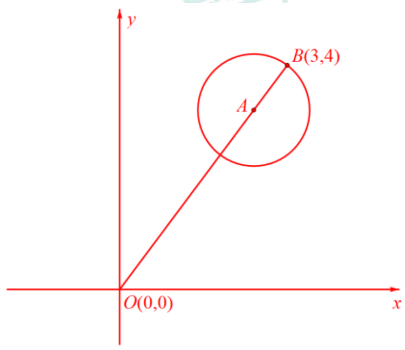


当O，A，B不共线时，如图，

在$\triangle OAB$中，

由三角形三边关系，

$|OB|-|AB|<|OA|$（两边之差小于第三边），即$|OA|>4$.



当O，A，B共线且A在线段OB上时，如图，

$|OA|=4$为最小值.

故选 A.

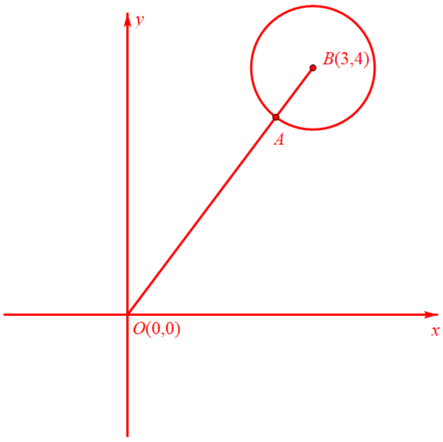
方法二：

设该圆的圆心为A，由题意A到点$B(3,4)$的距离$|AB|=1$，

所以A在以B为圆心，1为半径的圆上.

$|OA|_{\min}=|OB|-1=5-1=4$.

故选 A.



6. 已知函数$f(x)=2^x-x-1$，则不等式$f(x)>0$的解集是

A. $(-1,1)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

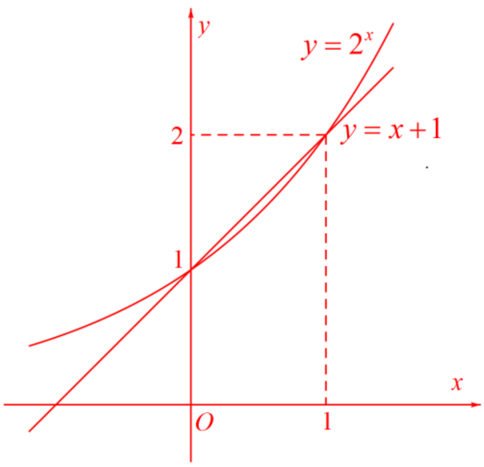
C. $(0,1)$　　D. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

【答案】D

【解析】

方法一：不等式$f(x)>0$可以转变成$2^x>x+1$，

画出指数函数与一次函数的图象：



由图象可知，

$y=2^x$与$y=x+1$的交点为$(0,1)$和$(1,2)$两点，

故当$y=2^x$在$y=x+1$上方时，

$x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

所以解集为$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

故选 D.

方法二：

因为 $f(-1)=2^{-1}+1-1=\dfrac{1}{2}>0$，故排除选项 ABC，

故选 D.

7. 设抛物线的顶点为O，焦点为F，准线为l，P是抛物线上异于O的一点，过P作$PQ\perp l$于Q，则线段FQ的垂直平分线

A.经过点O　　B.经过点P

C.平行于直线OP　　D.垂直于直线OP

【答案】B

【解析】

根据抛物线的性质：抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离，

因此$|PF|=|PQ|$，

所以点P在线段FQ的垂直平分线上，

故选 B.

8. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-9$，$a_5=-1$.记$T_n=a_1a_2\cdots a_n(n=1,2,\cdots)$，则数列$\{T_n\}$

A.有最大项，有最小项　　B.有最大项，无最小项

C.无最大项，有最小项　　D.无最大项，无最小项

【答案】B

【解析】

根据题目条件得到：等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-9$，$a_5=-1$，

得到公差$d=\dfrac{a_5-a_1}{5-1}=\dfrac{-1-(-9)}{4}=2$，

所以等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-11(n\in\mathbf{N}^*)$.

①当$n\le 5$时，$a_n<0$，$T_1=-9$，$T_2=63$，$T_3=-315$，$T_4=945$，$T_5=-945$，

所以$T_5<T_3<T_1<0<T_2<T_4$.

②当$n=6$时，$a_6=1$，$T_6=-945=T_5$，

③当$n\ge 7$时，$a_n>1$，即$a_7a_8\cdots a_n>0$，

所以$T_n=T_6\cdot a_7a_8\cdots a_n<0$，

且$\dfrac{T_n}{T_{n-1}}=a_n>1$，

所以$T_{n+1}<T_n<T_6<0$.

综上，$T_{n+1}<T_n<T_6=T_5<T_3<T_1<0<T_2<T_4(n\ge 7)$，

所以数列$\{T_n\}$有最大项$T_4=945$，无最小项，

故选 B.

9. 已知$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，则“存在$k\in\mathbf{Z}$使得$\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$”是“$\sin\alpha=\sin\beta$”的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

充分条件：

k为偶数时，$\alpha=k\pi+\beta$，则$\sin\alpha=\sin(k\pi+\beta)=\sin\beta$，成立；

k为奇数时，$\alpha=k\pi-\beta$，则$\sin\alpha=\sin(k\pi-\beta)=-\sin(-\beta)=\sin\beta$，成立；

充分条件成立；

必要条件：

因为$\sin\alpha=\sin\beta$，所以有：

①$\alpha=\beta+2n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，得：$\alpha=k\pi+\beta$（k为偶数）；

②$\alpha=\pi-\beta+2n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，得：$\alpha=k\pi-\beta$（k为奇数）；

必要条件成立.

故选 C.

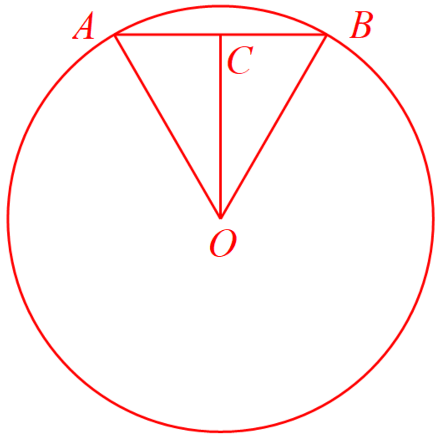
10. 2020 年 3 月 14 日是全球首个国际圆周率日(π Day).历史上，求圆周率π的方法有多种，与中国传统数学中的“割圆术”相似，数学家阿尔•卡西的方法是：当正整数n充分大时，计算单位圆的内接正$6n$边形的周长和外切正$6n$边形（各边均与圆相切的正$6n$边形）的周长，将它们的算术平均数作为2π的近似值.按照阿尔•卡西的方法，π的近似值的表达式是

A. $3n(\sin\dfrac{30^\circ}{n}+\tan\dfrac{30^\circ}{n})$　　B. $6n(\sin\dfrac{30^\circ}{n}+\tan\dfrac{30^\circ}{n})$

C. $3n(\sin\dfrac{60^\circ}{n}+\tan\dfrac{60^\circ}{n})$　　D. $6n(\sin\dfrac{60^\circ}{n}+\tan\dfrac{60^\circ}{n})$

【答案】A

【解析】



如图所示，AB为单位圆内接正$6n$边形的一条边，

设C为AB的中点，

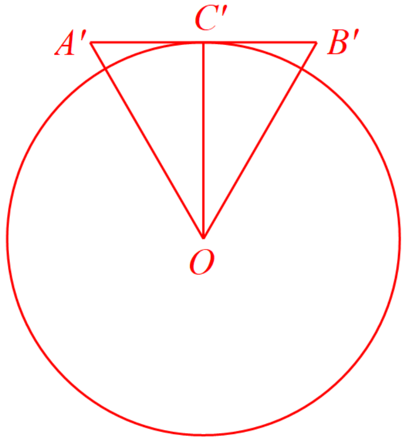
$\angle AOB=\dfrac{360^\circ}{6n}=\dfrac{60^\circ}{n}$，$\angle AOC=\dfrac{\angle AOB}{2}=\dfrac{30^\circ}{n}$，

$|AC|=|AO|\cdot\sin\angle AOC=1\times\sin\dfrac{30^\circ}{n}=\sin\dfrac{30^\circ}{n}$，

$|AB|=2|AC|=2\sin\dfrac{30^\circ}{n}$，

圆内接正$6n$边形的周长：$L_{内}=6n\cdot|AB|=6n\times2\sin\dfrac{30^\circ}{n}=12n\sin\dfrac{30^\circ}{n}$，

$A'B'$为单位圆外切正$6n$边形的一条边，



设$A'B'$与圆相切于点C'，C'恰为$A'B'$的中点，

$\angle A'OB'=\dfrac{360^\circ}{6n}=\dfrac{60^\circ}{n}$，$\angle A'OC'=\dfrac{\angle A'OB'}{2}=\dfrac{30^\circ}{n}$，

$|A'C'|=|OC'|\cdot\tan\angle A'OC'=1\times\tan\dfrac{30^\circ}{n}=\tan\dfrac{30^\circ}{n}$，

$|A'B'|=2|A'C'|=2\tan\dfrac{30^\circ}{n}$，

圆外切正$6n$边形的周长：$L_{外}=6n\cdot|A'B'|=6n\times2\tan\dfrac{30^\circ}{n}=12n\tan\dfrac{30^\circ}{n}$，

由题知：$2\pi\approx\dfrac{12n\sin\dfrac{30^\circ}{n}+12n\tan\dfrac{30^\circ}{n}}{2}$，

所以$\pi\approx3n(\sin\dfrac{30^\circ}{n}+\tan\dfrac{30^\circ}{n})$，

故选 A.

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln x$ 的定义域是______.

【答案】$\{x\mid x>0\}$

【解析】

由题意得 $\begin{cases}x+1\neq 0\\ x>0\end{cases}$，解得 $x>0$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x>0\}$.

12. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$，则 C 的右焦点的坐标为______；C 的焦点到其渐近线的距离是______.

【答案】$(3,0)$；$\sqrt{3}$

【解析】

由题 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$，所以 $a^2=6$，$b^2=3$，$c^2=a^2+b^2=9$，$c=3$，

因为双曲线焦点在 x 轴上，所以右焦点坐标为 $(3,0)$，

双曲线渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，即 $\sqrt{2}x\pm 2y=0$，

双曲线焦点为 $(3,0)$，$(-3,0)$，由点到直线距离公式得，

右焦点到渐近线距离：$d_1=\frac{|3\sqrt{2}-0|}{\sqrt{2+4}}=\sqrt{3}$，$d_2=\frac{|-3\sqrt{2}-0|}{\sqrt{2+4}}=\sqrt{3}$，

左焦点到渐近线距离：$d_3=\frac{|3\sqrt{2}-0|}{\sqrt{2+4}}=\sqrt{3}$，$d_4=\frac{|-3\sqrt{2}-0|}{\sqrt{2+4}}=\sqrt{3}$，

也可由对称性直接得出，$d=d_1=d_2=d_3=d_4$，

所以焦点到渐近线的距离 $d=\sqrt{3}$.

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $|\overrightarrow{PD}|=$ ______；$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=$ ______.

【答案】$\sqrt{5}$；-1

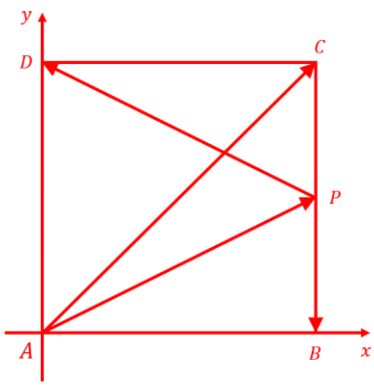
【解析】

方法一：由 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，知 P 为 BC 中点，

所以 $\left|\overrightarrow{PD}\right|=|PD|=\sqrt{|PC|^2+|DC|^2}=\sqrt{5}$，

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=1\times1\times\cos180^\circ+0=-1$.



方法二：以 A 为原点，建立坐标系，

$A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(2,2)$，$D(0,2)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2)$，

设 $P(x,y)$，有 $\overrightarrow{AP}=(x,y)$，

又 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

所以 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times2\\ y=\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{2}\times2\end{cases}$，所以 $P(2,1)$，

所以 $\overrightarrow{PD}=(-2,1)$，$\overrightarrow{PB}=(0,-1)$，

所以 $\left|\overrightarrow{PD}\right|=|PD|=\sqrt{|PC|^2+|DC|^2}=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PB}=(-2)\times0+1\times(-1)=-1$.

方法三：由 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，知 P 为 BC 中点，

所以 $\left|\overrightarrow{PD}\right|=|PD|=\sqrt{|PC|^2+|DC|^2}=\sqrt{5}$，

又 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=\left|\overrightarrow{PB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PD}\right|\cdot\cos<\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PD}>$，

所以所求 $=\left|\overrightarrow{PB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PD}\right|\cdot\cos\angle DPB=\left|\overrightarrow{PB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PD}\right|\cdot(-\cos\angle DPC)$

$=-\left|\overrightarrow{PB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PC}\right|=-1$.

14. 若函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x$ 的最大值为 2，则常数 φ 的一个取值为_______.

【答案】$\dfrac{\pi}{2}$（答案满足 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 均可）

【解析】

$f(x)=\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi+\cos x$

$=\sin x\cos\varphi+\cos x(1+\sin\varphi)$

$=\sqrt{\cos^2\varphi+(\sin\varphi+1)^2}\sin(x+\theta)$

因为 $f(x)_{\max}=2$，

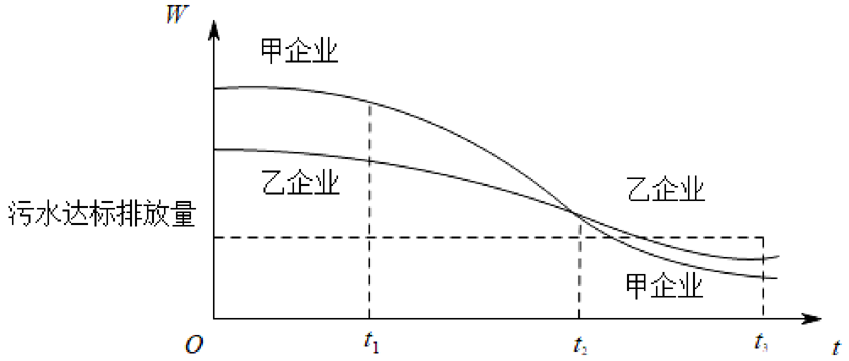
所以 $\sqrt{\cos^2\varphi+(\sin\varphi+1)^2}=2$，

整理得 $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+2\sin\varphi+1=4$.

所以 $\sin\varphi=1$，即 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

取 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 即可.

15. 为满足人民对美好生活的向往，环保部门要求相关企业加强污水治理，排放未达标的企业要限期整改.设企业的污水排放量W与时间t的关系为$W=f(t)$，用$-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$的大小评价在$[a,b]$这段时间内企业污水治理能力的强弱.已知整改期内，甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如下图所示.



给出下列四个结论：

①在$[t_1,t_2]$这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

②在t_2时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

③在t_3时刻，甲、乙两企业的污水排放都已达标；

④甲企业在$[0,t_1]$，$[t_1,t_2]$，$[t_2,t_3]$这三段时间中，在$[0,t_1]$的污水治理能力最强.

其中所有正确结论的序号是_______.

【答案】①②③

【解析】由题意可知，$-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$的大小决定在$[a,b]$这段时间内企业污水治理的能力，即从图形表达的角度，图上$(a,f(a))$，$(b,f(b))$两点所连直线的斜率的相反数的大小表示在$[a,b]$这段时间内企业污水治理能力的强弱.

①因为从图象上看，显然$(t_1,f_{甲}(t_1))$，$(t_2,f_{甲}(t_2))$两点所连直线的斜率的相反数大于$(t_1,f_{乙}(t_1))$，$(t_2,f_{乙}(t_2))$两点所连直线的斜率的相反数，所以在$[t_1,t_2]$这段时间内，甲企业的治污能力较强，所以①正确；

②因为$-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$可以看作函数$f(t)$从a到b的平均变化率的相反数，根据导数的定义，平均变化率中a趋近于b得到的极限值即为函数$f(t)$在b处的导数，几何意义为$f(t)$函数图象在b处的切线的斜率，显然图中$f_{甲}(t)$在t_2处的切线斜率的相反数大于$f_{乙}(t)$在t_2处的切线斜率的相反数，所以甲企业在t_2时刻的治污能力较强，所以②正确；

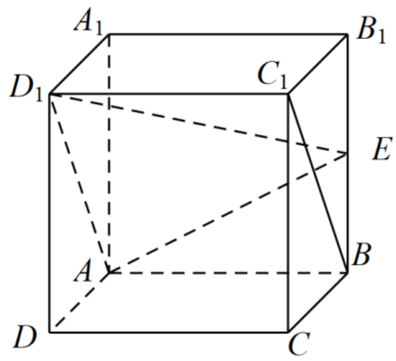
③因为在t_3时刻，甲、乙企业的污水排放量都小于污水达标排放量，所以甲、乙企业均达标，所以③正确；

④由图象可知，$(t_1, f_{甲}(t_1))$，$(t_2, f_{甲}(t_2))$两点所连直线的斜率的相反数最大，所以甲企业在$[0,t_1]$，$[t_1,t_2]$，$[t_2,t_3]$三段时间中，在$[t_1,t_2]$的治水能力最强，所以④错误.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演练步骤或证明过程。

16. （本小题 13 分）

如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为BB_1的中点.



（Ⅰ）求证：BC_1 // 平面AD_1E；

（Ⅱ）求直线AA_1与平面AD_1E所成角的正弦值.

【解析】

（Ⅰ）证明：在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，

C_1D_1 // AB且$C_1D_1=AB$，

所以四边形ABC_1D_1为平行四边形.

所以BC_1 // AD_1.

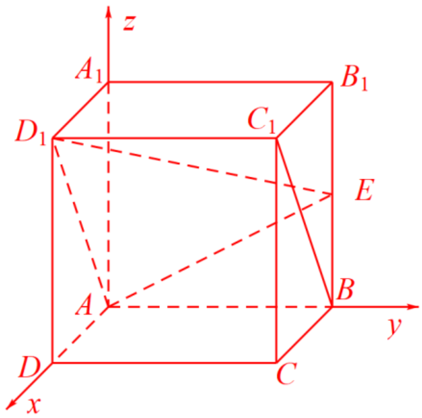
因为$AD_1\subset$平面AD_1E，$BC_1\not\subset$平面AD_1E.

所以 $BC_1 // $ 平面 AD_1E.

（Ⅱ）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 \perp AD$， $AA_1 \perp AB$， $AB \perp AD$.

以 A 为原点， AD、AB、AA_1 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴，

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$.



不妨设正方体的棱长为1，

则 $A(0,0,0)$， $A_1(0,0,1)$， $D_1(1,0,1)$， $E(0,1,\frac{1}{2})$，

则 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$， $\overrightarrow{AD_1}=(1,0,1)$， $\overrightarrow{AE}=(0,1,\frac{1}{2})$.

设平面 AD_1E 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$.

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}x+z=0\\ y+\dfrac{z}{2}=0\end{cases}$， 令 $y=1$， 得 $\begin{cases}x=2\\ y=1\\ z=-2\end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{m}=(2,1,-2)$.

设直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AA_1}\rangle\right|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}}{|\boldsymbol{m}|\times|\overrightarrow{AA_1}|}\right|=\left|\dfrac{0\times2+0\times1+1\times(-2)}{1\times3}\right|=\dfrac{2}{3}$，

所以直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值为 $\dfrac{2}{3}$.

17. （本小题 13 分）

在$\triangle ABC$中，$a+b=11$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

（Ⅰ）a的值；

（Ⅱ）$\sin C$和$\triangle ABC$的面积.

条件①：$c=7$，$\cos A=-\frac{1}{7}$；

条件②：$\cos A=\frac{1}{8}$，$\cos B=\frac{9}{16}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

【解析】

选择①：

（Ⅰ）因为$a+b=11$，

所以$b=11-a$，

由余弦定理知：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

所以$a^2=(11-a)^2+49-2\times(11-a)\times7\times(-\frac{1}{7})$，

所以$a=8$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$a=8$，

所以$b=3$，

由余弦定理知：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

所以$\cos C=\frac{1}{2}$，

因为$C\in(0,\pi)$，

所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 8\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

选择②：

（Ⅰ）因为$a+b=11$，

所以$b=11-a$，

因为$\cos A=\dfrac{1}{8}$， $\cos B=\dfrac{9}{16}$，

因为$A\in(0,\pi),B\in(0,\pi)$,

所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$， $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$，

由正弦定理知：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

即$\dfrac{a}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\dfrac{11-a}{\frac{5\sqrt{7}}{16}}$， 所以$\dfrac{5\sqrt{7}}{16}a=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}(11-a)$，

解得$a=6,b=11-a=5$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，在$\triangle ABC$中，

$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}\times\dfrac{9}{16}+\dfrac{1}{8}\times\dfrac{5\sqrt{7}}{16}=\dfrac{32\sqrt{7}}{128}$

$=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 6\times 5\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$.

18. （本小题 14 分）

某校为举办甲、乙两项不同活动，分别设计了相应的活动方案：方案一、方案二. 为了解该校学生对活动方案是否支持，对学生进行简单随机抽样，获得数据如下表：

	男生		女生	
	支持	不支持	支持	不支持
方案一	200 人	400 人	300 人	100 人
方案二	350 人	250 人	150 人	250 人

假设所有学生对活动方案是否支持相互独立.

（Ⅰ）分别估计该校男生支持方案一的概率、该校女生支持方案一的概率；

（Ⅱ）从该校全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 1 人，估计这 3 人中恰有 2 人支持方案一的概率；

（Ⅲ）将该校学生支持方案二的概率估计值记为 p_0，假设该校一年级有 500 名男生和 300 名女生，除一年级外其他年级学生支持方案二的概率估计值记为 p_1，试比较 p_0 与 p_1 的大小.（结论不要求证明）

【解析】

（Ⅰ）设“该校男生支持方案一”为事件 A，“该校女生支持方案一”为事件 B，因为所有学生对活动方案是否支持相互独立，故由表格数据知所抽取的男生总人数为 $200+400=600$ 人，其中支持方案一人数为 200 人，所抽取的女生总人数为 $300+100=400$ 人，其中支持方案一人数为 300 人，

所以该校男生支持方案一的概率为 $P(A)=\dfrac{200}{600}=\dfrac{1}{3}$.

该校女生支持方案一的概率为$P(B)=\dfrac{300}{400}=\dfrac{3}{4}$.

（Ⅱ）设“该校全体男生中随机抽取2人，全体女生中随机抽取1人，这3人中恰有2人支持方案一”为事件C，事件C包含两种情况：

①2名男生支持，1名女生不支持；

②1名男生支持，1名男生不支持，1名女生支持.

由（Ⅰ）知$P(C)=C_2^2(\dfrac{1}{3})^2\times(1-\dfrac{3}{4})+C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times(1-\dfrac{1}{3})\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{13}{36}$.

（Ⅲ）$p_0>p_1$.

19. （本小题 15 分）

已知函数$f(x)=12-x^2$.

（Ⅰ）求曲线$y=f(x)$的斜率等于-2的切线方程；

（Ⅱ）设曲线$y=f(x)$在点$(t,f(t))$处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为$S(t)$，求$S(t)$的最小值.

【解析】

（Ⅰ）$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，

因为$f'(x)=-2x$，则令$f'(x)=-2$时，解得$x=1$，

所以$f(1)=11$，即切点为$(1,11)$，切线斜率为-2，

所以$f(x)$在$(1,11)$处的切线的点斜式方程为$y-11=-2(x-1)$，

整理得$2x+y-13=0$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$f'(x)=-2x$，则$f'(t)=-2t$，即切线斜率$k=-2t$，

因为$f(t)=12-t^2$，即切点为$(t,12-t^2)$，

所以 $f(x)$ 在 $(t,f(t))$ 处的切线的点斜式方程为 $y-(12-t^2)=-2t(x-t)$，

整理得：$y=-2tx+t^2+12$，

又因为切线与坐标轴围成三角形，所以 $t\neq 0$，

所以 $x=0$ 时，$y=t^2+12$，设 $A(0,t^2+12)$，则 $|OA|=t^2+12$，

$y=0$ 时，$x=\dfrac{t^2+12}{2t}$，设 $B(\dfrac{t^2+12}{2t},0)$，则 $|OB|=\dfrac{t^2+12}{2|t|}$，

所以 $S(t)=\dfrac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|=\dfrac{1}{2}\cdot(t^2+12)\cdot\dfrac{t^2+12}{2|t|}=\dfrac{1}{4}|t|^3+6|t|+\dfrac{36}{|t|}(t\neq 0)$，

不妨设 $v=|t|(v>0)$，则 $g(v)=\dfrac{1}{4}v^3+6v+\dfrac{36}{v}(v>0)$，

所以 $g'(v)=\dfrac{3}{4}v^2+6-\dfrac{36}{v^2}$，

令 $h(v)=g'(v)(v>0)$，则 $h'(v)=\dfrac{3}{2}v+\dfrac{72}{v^3}>0$ 恒成立，

所以 $h(v)$ 即 $g'(v)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $g'(v)=0$ 时，即 $\dfrac{3}{4}v^2+6-\dfrac{36}{v^2}=0$，

整理得：$v^4+8v^2-48=0$，

令 $s=v^2(s>0)$，则 $s^2+8s-48=0$，

解得 $s=4$（符合题意）或 $s=-12$（舍），

所以 $s=v^2=4(v>0)$，则 $v=2$，

所以 $g'(2)=0$，

所以$g(v)$与$g'(v)$随v变化如下表所示：

v	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$g'(v)$	$-$	0	$+$
$g(v)$	↘	极小值	↗

所以$g(v)$的最小值等于$g(v)$的极小值，即$g(v)_{\min}=g(2)=32$，

所以$S(t)_{\min}=g(v)_{\min}=32$，

所以$S(t)$最小值为32.

20. （本小题 15 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$过点$A(-2,-1)$，且$a=2b$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过点$B(-4,0)$的直线l交椭圆C于点M，N，直线MA，NA分别交直线$x=-4$于点P，Q.求$\dfrac{|PB|}{|BQ|}$的值.

【解析】

（Ⅰ）由椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$过点$A(-2,-1)$，可得：$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$，

又因为$a=2b$，所以$a^2=8$，$b^2=2$.

故椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

（Ⅱ）方法一：由题意可知，直线l斜率存在，

因为直线l过点$B(-4,0)$，

所以设直线l的方程为：$y=k(x+4)$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=k(x+4)\end{cases}$，得$(4k^2+1)x^2+32k^2x+64k^2-8=0$.

因为直线l交椭圆C于点M，N，

$\Delta=(32k^2)^2-4(4k^2+1)(64k^2-8)=32(1-4k^2)>0$，

解得：$-\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{1}{2}$.

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=\dfrac{-32k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{64k^2-8}{4k^2+1}$，且$x_1,x_2\neq-2$.

直线MA的方程为：$y+1=\dfrac{y_1+1}{x_1+2}(x+2)$，

令$x=-4$，得$y_P=\dfrac{-2(y_1+1)}{x_1+2}-1$，

同理，得：$y_Q=\dfrac{-2(y_2+1)}{x_2+2}-1$.

$$y_P+y_Q=-2(\frac{y_1+1}{x_1+2}+\frac{y_2+1}{x_2+2})-2$$

$$=-2\cdot\frac{[k(x_1+4)+1](x_2+2)+[k(x_2+4)+1](x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}-2$$

$$=-2\cdot\frac{2kx_1x_2+(6k+1)(x_1+x_2)+16k+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}-2$$

$$=-2\cdot\frac{2k\cdot\frac{64k^2-8}{4k^2+1}+(6k+1)\frac{-32k^2}{4k^2+1}+16k+4}{\frac{64k^2-8}{4k^2+1}+2\cdot\frac{-32k^2}{4k^2+1}+4}-2$$

$=0$.

即$y_P=-y_Q$，所以$\dfrac{|PB|}{|BQ|}=\dfrac{|y_P|}{|y_Q|}=1$.

方法二：设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(-4,y_P)$，$Q(-4,y_Q)$.

当直线l斜率为0时，经验证，$y_P=-y_Q$，

此时$\dfrac{|PB|}{|BQ|}=\dfrac{|y_P|}{|y_Q|}=1$.

当直线l斜率不为0时，设直线l的方程为：$x=ny-4$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ x=ny-4\end{cases}$，

得$(n^2+4)y^2-8ny+8=0$，

因为直线l交椭圆C于点M，N，

$\Delta=(8n)^2-32(n^2+4)>0$，即$n<-2$或$n>2$.

则$y_1+y_2=\dfrac{8n}{n^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{8}{n^2+4}$.

因为A，M，P三点共线，且$x_1,x_2\neq-2$,

所以$k_{AM}=k_{AP}$，即$\dfrac{y_1+1}{x_1+2}=\dfrac{y_P+1}{-2}$，所以$y_P=\dfrac{-2(y_1+1)}{x_1+2}-1=\dfrac{-2(y_1+1)}{ny_1-2}-1$，

同理$y_Q=\dfrac{-2(y_2+1)}{ny_2-2}-1$.

$$y_P+y_Q=\frac{-2(y_1+1)}{ny_1-2}+\frac{-2(y_2+1)}{ny_2-2}-2$$

$$=\frac{-4ny_1y_2+(4-2n)(y_1+y_2)+8-2n^2y_1y_2+4n(y_1+y_2)-8}{(ny_1-2)(ny_2-2)}$$

$$=\frac{(-4n-2n^2)\dfrac{8}{n^2+4}+(4+2n)\dfrac{8n}{n^2+4}}{(ny_1-2)(ny_2-2)}=0.$$

所以$y_P=-y_Q$，即$\dfrac{|PB|}{|BQ|}=\dfrac{|y_P|}{|y_Q|}=1$.

21. （本小题 15 分）

已知$\{a_n\}$是无穷数列，给出两个性质：

①对于$\{a_n\}$中任意两项$a_i,a_j(i>j)$，在$\{a_n\}$中都存在一项a_m，使得$\dfrac{a_i^2}{a_j}=a_m$；

②对于$\{a_n\}$中任意一项$a_n(n\geq 3)$，在$\{a_n\}$中都存在两项$a_k,a_l(k>l)$，使得$a_n=\dfrac{a_k^2}{a_l}$.

（Ⅰ）若$a_n=n(n=1,2,\cdots)$，判断数列$\{a_n\}$是否满足性质①，说明理由；

（Ⅱ）若$a_n=2^{n-1}(n=1,2,\cdots)$，判断数列$\{a_n\}$是否同时满足性质①和性质②，说明理由；

（Ⅲ）若$\{a_n\}$是递增数列，且同时满足性质①和性质②，证明：$\{a_n\}$为等比数列.

【解析】

（Ⅰ）数列$\{a_n\}$不满足性质①，举反例，$\dfrac{a_4^2}{a_3}=\dfrac{16}{3}$，$\dfrac{16}{3}$不在数列$\{a_n\}$中.

（Ⅱ）数列$\{a_n\}$同时满足性质①和②，

$\dfrac{a_i^2}{a_j}=\dfrac{(2^{i-1})^2}{2^{j-1}}=\dfrac{2^{2i-2}}{2^{j-1}}=2^{2i-j-1}$，又因为$a_{2i-j}=2^{2i-j-1}$，故满足性质①，

令$l=n-2$，则$k=n-1$，此时$a_n=2^{n-1}=\dfrac{2^{2n-2}}{2^{n-2-1}}=\dfrac{a_k^2}{a_l}$，

且符合$k>l\geq 1$，故数列$\{a_n\}$同时满足性质①和性质②.

（Ⅲ）对于$a_1>0$，因为$\{a_n\}$是递增数列，

所以$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$，

所以$a_n>0$.

由性质②，取$n=3$，

则存在$a_k,a_l(k>l)$，使得$a_3=\dfrac{{a_k}^2}{a_l}=\dfrac{a_k}{a_l}\cdot a_k>a_k$，

所以$k<3$，

所以$k=2$，$l=1$，

所以$a_3=\dfrac{{a_2}^2}{a_1}$，

所以数列$\{a_n\}$中a_1，a_2，a_3三项成等比.

对于$a_1<0$，

由性质①，取$i=2$，$j=1$，则存在a_m使得$a_m=\dfrac{{a_2}^2}{a_1}$，

易证$a_m\neq a_2$，即$m\neq 2$，

若$a_m=a_1$，则只能${a_1}^2={a_2}^2$，此时$a_2=-a_1>0$，

所以当$n\geq 2$时，$a_n>0$，

取$i>2$，$j=1$，因为数列$\{a_n\}$是递增数列，$a_i>a_2>0$

所以有$a_{m'}=\dfrac{{a_i}^2}{a_j}=\dfrac{{a_i}^2}{a_1}<\dfrac{{a_2}^2}{a_1}=a_1$，显然不存在满足不等式的$m'$，矛盾，$a_m=a_1$也不成立.

所以$m\geq 3$.

而$a_m\cdot a_1={a_2}^2>0$，所以a_m与a_1同号，

所以$a_m<0$，

所以$a_3<0$，$a_2<0$，

所以a_1，a_2，a_3同号，

下面证明，对任意$k\geq 2$，$a_k<0$时，

则$a_{k+1}<0$.

由性质①，取$i=k$，$j=k-1$，

则存在m，使得$a_m=\dfrac{a_k^{\ 2}}{a_{k-1}}$，

首先a_m与a_{k-1}同号，由递增数列可知，$a_{k-1}<a_k<0$

所以$a_m<0$，

假设$m\le k$，则$a_m\le a_k<0$，

所以$|a_m|\ge|a_k|>0$，

结合$a_{k-1}<a_k<0$，有$|a_{k-1}|>|a_k|>0$

显然$|a_m|\cdot|a_{k-1}|>|a_k|^2$与$a_m a_{k-1}=a_k^{\ 2}$矛盾，

所以$m\ge k+1$，$a_m\ge a_{k+1}$，又因为$a_m<0$，

所以$a_{k+1}<0$，

所以$\{a_n\}$同号且均为负数.

因此对于$\{a_n\}$，$a_m>\dfrac{a_k^{\ 2}}{a_l}=\dfrac{a_k}{a_l}\cdot a_k>a_k$恒成立.

所以$a_3=\dfrac{a_k^{\ 2}}{a_l}=\dfrac{a_k}{a_l}\cdot a_k>a_k$，得$3>k>l$

所以$k=2$，$l=1$，

所以$a_3=\dfrac{a_2^{\ 2}}{a_1}$，

综上所述，

当$n\le 3$时，$\{a_n\}$是等比数列.

假设，当$n\le k$（显然$k\ge 3$）时，a_1，a_2，…，a_k成等比，

设其通项公式为$a_n=a_1\cdot q^{n-1}(n\le k)$，

下面证明$a_{k+1}=a_1\cdot q^k$：

由性质①，取$i=k$，$j=k-1$，

则存在 m，使得 $a_m=\dfrac{a_i{}^2}{a_j}=\dfrac{(a_1\cdot q^{k-1})^2}{a_1\cdot q^{k-2}}=a_1\cdot q^k$，

假设 $m\neq k+1$，此时必有 $m\geq k+2$，

即 $a_m=a_1\cdot q^k$，而 $a_k=a_1\cdot q^{k-1}$，

考察 a_{k+1}，

由递增数列可知 $a_k<a_{k+1}<a_m$，

即 $a_1\cdot q^{k-1}<a_{k+1}<a_1\cdot q^k$.

令 $a_{k+1}=a_1\cdot q^s$，此时 $k-1<s<k$，所以 $s\notin\mathbf{N}^*$.

另一方面：

由性质②，对于 a_{k+1}，，存在 $k',l'(k'>l')$，

使得 $a_{k+1}=\dfrac{a_{k'}{}^2}{a_{l'}}=\dfrac{a_{k'}}{a_{l'}}\cdot a_{k'}>a_{k'}$，

所以 $k'<k+1$，即 $k'\leq k$ 且 $l'<k$，

所以 $a_{k+1}=\dfrac{a_{k'}{}^2}{a_{l'}}=\dfrac{a_1{}^2\cdot q^{2k'-2}}{a_1\cdot q^{l'-1}}=a_1\cdot q^{2k'-l'-1}$，

而 $2k'-l'-1\in\mathbf{N}^*$，$s\notin\mathbf{N}^*$，$a_l\neq 0$，

所以 $a_1\cdot q^{2k'-l'-1}\neq a_1\cdot q^s$，

而这两个都是 a_{k+1} 的表达式，所以矛盾，

所以 $m=k+1$，

所以 $a_{k+1}=a_1\cdot q^k$，

所以当 $n\leq k+1$ 时 a_1，a_2 ，…，a_{k+1} 也成等比

综上所述，$\{a_n\}$ 为等比数列.