2020 年北京市东城区高三一模数学逐题解析

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,x-1>0\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，那么 $A\cap B=$

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{-1,0,1,2\}$　　D. $\{2\}$

【答案】D

【解析】由题可得 $A=\{x\,|\,x>1\}$，因为 $B=\{-1,0,1,2\}$，由集合的运算法则可得 $A\cap B=\{2\}$，故选 D.

2. 函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+1}}$ 的定义域为

A. $(-1,2]$　　B. $[2,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$

【答案】B

【解析】函数有意义，则有 $\dfrac{x-2}{x^2+1}\geq 0$，可得 $x\geq 2$，所以函数定义域为 $[2,+\infty)$，故选 B.

3. 已知 $\dfrac{2}{1+a\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}\ (a\in\mathbf{R})$，则 $a=$

A. 1　　B. 0

C. -1　　D. -2

【答案】A

【解析】由复数运算法则可知$\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}=1+a\mathrm{i}$，化简得$1+\mathrm{i}=1+a\mathrm{i}$，所以$a=1$，故选 A.

4. 若双曲线$C:x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(b>0)$的一条渐近线与直线$y=2x+1$平行，则$b$的值为

A. 1　　　　B. $\sqrt{2}$

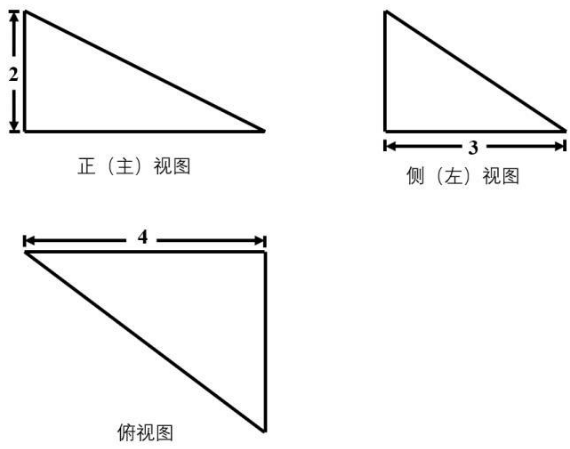
C. $\sqrt{3}$　　　　D. 2

【答案】D

【解析】因为双曲线渐近线与直线$y=2x+1$平行，则双曲线的一条渐近线为$y=2x$.

由$x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(b>0)$可得双曲线渐近线为$y=\pm bx$，所以$b=2$，故选 D.

5. 如图所示，某三棱锥的正（主）视图、俯视图、侧（左）视图均为直角三角形，则该三棱锥的体积为



A. 4

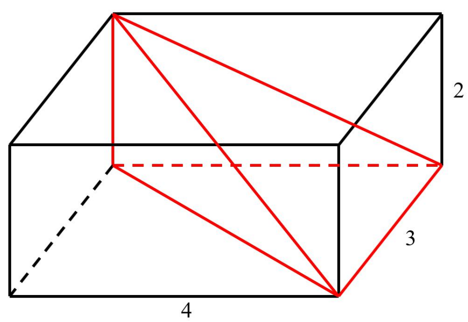
B. 6

C. 8

D. 12

【答案】A

【解析】该三视图的直观图如图所示：



$V=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times4\times3)\times2=4$，故选 A.

6. 已知$x<-1$，那么在下列不等式中，不成立的是

A. $x^2-1>0$　　B. $x+\frac{1}{x}<-2$

C. $\sin x-x>0$　　D. $\cos x+x>0$

【答案】D

【解析】选项 A：若$x<-1$，则$x^2>1$，则$x^2-1>0$，故成立；

选项 B：若$x<-1$，则$-x>0$，$-\frac{1}{x}>0$，由均值不等式可知$(-x)+(-\frac{1}{x})\geq 2\sqrt{(-x)(-\frac{1}{x})}=2$，当且仅当$-x=-\frac{1}{x}$时取等号，即$-x=1$，$x=-1$.又因为$x<-1$，所以$-x-\frac{1}{x}>2$，即$x+\frac{1}{x}<-2$，故成立；

选项 C：因为$-1\leq\sin x\leq 1$，且$x<-1$，所以$\sin x>x$，即$\sin x-x>0$，故成立；

选项 D：当$x=-\pi$时，$\cos(-\pi)+(-\pi)=-1-\pi<0$，所以$\cos x+x>0$在$x<-1$时不都成立.

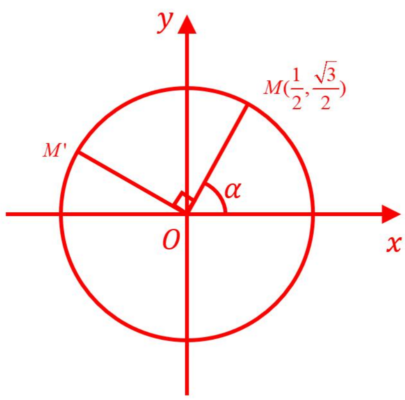
故选 D.

7. 在平面直角坐标系中，动点M在单位圆上按逆时针方向作匀速圆周运动，每12分钟转动一周.若点M的初始位置坐标为$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，则运动到$3$分钟时，动点$M$所处位置的坐标是

A. $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$　　B. $(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

C. $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$　　D. $(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$

【答案】C



【解析】周期$T=12$分钟，3分钟$=\frac{1}{4}T$，

即OM绕点O逆时针旋转了$90°$；

若设x非负半轴为始边，OM为终边的角为α，

则$M(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$M'(\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha),\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha))$；

已知$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$M'(-\sin\alpha,\cos\alpha)$，即$M'(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，

故选 C.

8. 已知三角形ABC，那么“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$”是“三角形$ABC$为锐角三角形”的

A.充分而不必要条件　　　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2>|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2$，$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，即$4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$.

设$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$夹角为θ，即$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\theta>0$，又因为$\theta$为三角形内角，所以$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$.

充分条件：θ是锐角，不能说明其他两个角也是锐角，故不能说明$\triangle ABC$是锐角三角形，所以不具有充分性；

必要条件：若$\triangle ABC$为锐角三角形，即三个角都为锐角，所以$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以具有必要性.

故选 B.

9. 设O为坐标原点，点$A(1,0)$，动点P在抛物线$y^2=2x$上，且位于第一象限，M是线段PA的中点，则直线OM的斜率的范围为

A.$(0,1]$　　　　B.$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$

C.$(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$　　　　D.$[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$

【答案】C

【解析】设P点的坐标为$(\frac{y_0^2}{2},y_0)$，$y_0>0$，M点的坐标$(\frac{y_0^2}{4}+\frac{1}{2},\frac{y_0}{2})$，直线$OM$的斜率

$k_{OM}=\frac{2y_0}{y_0^2+2}=\frac{2}{y_0+\frac{2}{y_0}}\le\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当$y_0=\frac{2}{y_0}$，即得$y_0=\sqrt{2}$时取等.

故选 C.

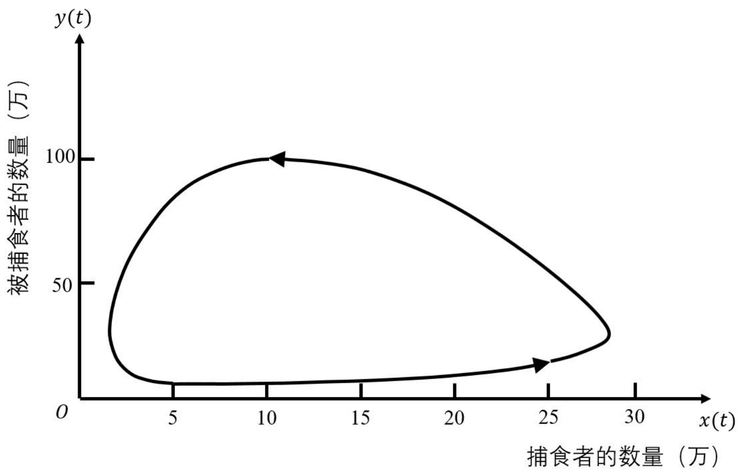
10. 假设存在两个物种，前者有充足的食物和生存空间，而后者仅以前者为食物，则我们称前者为被捕食者，后者为捕食者.现在我们来研究捕食者与被捕食者之间在理想状态下的数学模型.假设捕食者的数量以$x(t)$表示，被捕食者的数量以$y(t)$表示.下图描述的是这两个物种随时间变化的数量关系，其中箭头方向为时间增加的方向．下列说法正确的是

A.若在t_1，t_2时刻满足：$y(t_1)=y(t_2)$，则$x(t_1)=x(t_2)$

B.如果$y(t)$数量是先上升后下降的，那么$x(t)$的数量一定也是先上升后下降的

C.被捕食者数量与捕食者数量不会同时到达最大值或最小值

D.被捕食者数量与捕食者数量总和达到最大值时，被捕食者的数量也会达到最大值



【答案】C

【解析】由图可知，曲线中纵坐标相等时横坐标未必相等，所以A选项不对；在曲线上半段中观察到$y(t)$是先上升后下降的，而$x(t)$是不断变小的，所以B选项不对；捕食者数量最大时是在图像最右端，最小值是在图像最左端，此时都不是被捕食者的数量

的最值处，同样当被捕食者的数量最大即图像最上端和最小图像最下端时，也不是捕食者数量取最值的时候，所以被捕食者数量和捕食者数量不会同时达到最大值和最小值，C选项正确；当捕食者数量最大时在图像最右端，$x(t)\in(25,30)$，$y(t)\in(0,50)$此时二者总和$x(t)+y(t)\in(25,80)$，而由图像可知存在点$x(t)$=10，$y(t)$=100，$x(t)$+$y(t)$=110所以并不是被捕食者数量与捕食者数量总和达到最大值时，被捕食者的数量也会达到最大值，D选项不对；

故选 C.

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知向量$\boldsymbol{a}=(m,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$，$\boldsymbol{c}=(2,3)$，若$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$共线，则实数$m=$________.

【答案】3

【解析】$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(m-1,3)$，$\boldsymbol{c}=(2,3)$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})//\boldsymbol{c}\Rightarrow(m-1)\times3=3\times2\Rightarrow m=3$.

12. 在$(x+\frac{2}{x})^6$的展开式中常数项为________.（用数字作答）

【答案】160

【解析】$T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r\cdot x^{6-r}\cdot(\frac{2}{x})^r$

令$r=3$得常数项

所以$T_4=\mathrm{C}_6^3\cdot x^3\cdot(\frac{2}{x})^3=160$.

13. 圆心在 x 轴上，且与直线 $l_1: y=x$ 和 $l_2: y=x-2$ 都相切的圆的方程为________.

【答案】$(x-1)^2+y^2=\frac{1}{2}$

【解析】设圆为 $(x-a)^2+y^2=r^2$，圆心 $(a,0)$

$l_1: x-y=0$，$l_2: x-y-2=0$

由相切，有 $\frac{|a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|a-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=r \Rightarrow a=1$

所以 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$

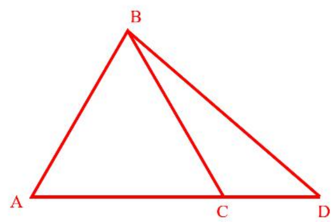
所以圆的方程为 $(x-1)^2+y^2=\frac{1}{2}$.

14. $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 在边 AC 的延长线上，且 $AD=3CD$，$BD=2\sqrt{7}$，则 $CD=$________，$\sin\angle ABD=$________.

【答案】$2,\frac{3\sqrt{21}}{14}$

【解析】因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形，所以 $\angle BCA=\frac{\pi}{3}, AC=BC.$

所以 $\angle BCD=\frac{2\pi}{3}, BC:CD=2:1.$ 所以 $BC=2CD.$



在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理可得，$\cos\angle BCD=\frac{BC^2+CD^2-BD^2}{2BC\cdot CD}$,

即 $-\frac{1}{2}=\frac{4CD^2+CD^2-28}{4CD^2}$，所以 $7CD^2=28$, 所以 $CD=2$.

所以 $BC=AC=AB=2CD=4$.

所以在 $\triangle ABD$ 中由正弦定理可得

$\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{BD}{\sin\angle A} \Rightarrow \frac{6}{\sin\angle ABD}=\frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，所以 $\sin\angle ABD=\frac{3\sqrt{21}}{14}$.

15.设$f(x)=\begin{cases}a(x+1),x<0\\2^{x-a}+2^{a-x},x\geq 0\end{cases}$，给出下列四个结论：

①对$\forall a>0$，$\exists t\in\mathbf{R}$，使得$f(x)=t$无解；

②对$\forall t>0$，$\exists a\in\mathbf{R}$，使得$f(x)=t$有两解；

③当$a<0$时，$\forall t>0$，使得$f(x)=t$有解；

④当$a>2$时，$\exists t\in\mathbf{R}$，使得$f(x)=t$有三解；

其中，所有正确结论的序号是________.

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求.全部选对得5分，不选或者有错选得0分，其他得3分.

【答案】③④

【解析】设$x-a=m(m\geq -a)$，$\therefore 2^{x-a}+2^{a-x}=2^{m}+2^{-m}\geq 2$,

当且仅当$2^{m}=2^{-m}$时取等.即$2m=0,x=a$时取等

① 若$a=2$，当$x<0$时，$f(x)<2$恒成立；当$x\geq 0$时，$f(x)\geq 2$恒成立，所以$f(x)$值域为$\mathbf{R}$，所以$\forall t\in\mathbf{R}$, $y=t$与$f(x)$都有交点，所以$f(x)=t$有解.

所以①错误.

② 当$t=\frac{1}{2}$时，若$x\geq 0$，$f(x)\geq 2$成立，所以$f(x)$与$y=t$不可能有交点.

所以当$x<0$时，$f(x)$在$(-\infty,0)$上为单调函数，所以$f(x)=t$至多有一个解.

所以当$t=\frac{1}{2}$时，$\forall a\in\mathbf{R},f(x)=t$至多有一个解.

所以②错误.

③ 当$a<0$时，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.

当$x<0$时，$f(x)>a$.当$x\geq 0$时，$f(x)>2$.$\therefore$由图像可得，$\forall t>0,f(x)=t$有解.

所以③正确.

④ 当$a>2$时，$f(x)\geq 2$恒成立且在$[0,a)$上为减函数，$(a,+\infty)$上为增函数.直线$y=a(x+1)$与y轴交点为$(0,a)$且在$(-\infty,0)$单调递增，$\therefore$由图像可得，$\exists t\in\mathbf{R}$，使$f(x)=t$有三个解.

所以④正确.

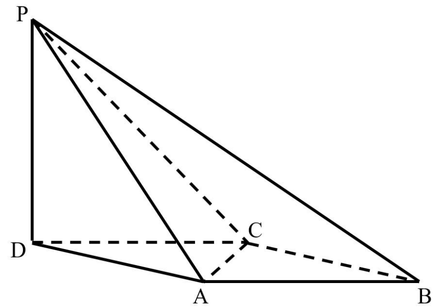
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演练步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$面$ABCD$，底面$ABCD$为平行四边形，$AB\perp AC$，$AB=AC=1$，$PD=1$.

（Ⅰ）求证：$AD//$平面PBC；

（Ⅱ）求二面角$D-PC-B$的余弦值的大小.



【解析】

（Ⅰ）$\because$底面$ABCD$为平行四边形，

$\therefore AD//BC$，

$\because AD\not\subset$平面PBC，$BC\subset$平面PBC，

$\therefore AD//$平面PBC.

（Ⅱ）$\because$底面$ABCD$为平行四边形，

$\therefore DC//AB$，

$\because AB\perp AC$，

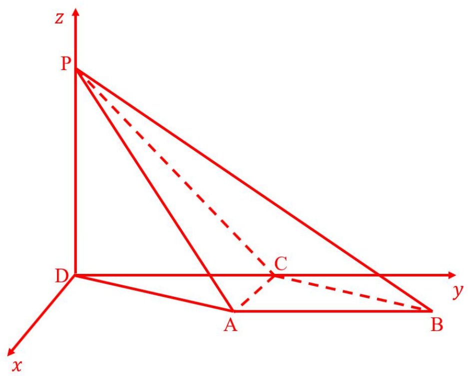
$\therefore DC\perp AC$，

$\because PD\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，

$\therefore AC\perp PD$，

$\because DC\cap PD=D$，$DC\subset$平面PDC，$PD\subset$平面PDC，

$\therefore AC\perp$平面PDC，



则以D为原点，DC、DP所在直线为y轴、z轴，如图建立空间直角坐标系$D-xyz$，其中x轴与AC平行，与DC垂直，

$\therefore D(0,0,0)$，$P(0,0,1)$，$C(0,1,0)$，$B(1,2,0)$，$A(1,1,0)$，

$\therefore \overrightarrow{AC}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{CB}=(1,1,0)$，

取平面PDC的法向量为$\overrightarrow{AC}=(-1,0,0)$，

设平面PBC的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}y-z=0\\ x+y=0\end{cases}$

$\therefore -x=y=z$，取$x=-1$，

$\therefore \boldsymbol{n}=(-1,1,1)$，

$\therefore \cos<\overrightarrow{AC},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

由图知二面角$D-PC-B$为钝角，

$\therefore$二面角$D-PC-B$的余弦值的大小为$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

17.（本小题 14 分）

已知函数$f(x)=a\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})-2\cos^2(x+\dfrac{\pi}{6})(a>0)$，且满足__________.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的解析式及最小正周期；

（Ⅱ）若关于x的方程$f(x)=1$在区间$[0,m]$上有两个不同解，求实数m的取值范围.

从①$f(x)$的最大值为1，②$f(x)$的图像与直线$y=-3$的两个相邻交点的距离等于π，③$f(x)$的图像过点$(\dfrac{\pi}{6},0)$，这三个条件中选择一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

【解析】

$$f(x)=a\sin(2x-\frac{\pi}{6})-2\bullet\frac{1+\cos(2x+\frac{\pi}{3})}{2}=a\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1-\cos(2x+\frac{\pi}{3})$$

$$=a\sin(2x-\frac{\pi}{6})-\sin[\frac{\pi}{2}-(2x+\frac{\pi}{3})]-1=(a+1)\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$$

（Ⅰ）选择条件①

$\because f(x)_{\max}=1$，$\therefore a+1-1=1$，$\therefore a=1$

$\therefore f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$

$\therefore f(x)$最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{|2|}=\pi$

（Ⅱ）$\because f(x)=1$，$\therefore 2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1=1$，$\therefore \sin(2x-\frac{\pi}{6})=1$

$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in \boldsymbol{Z})$，$\therefore x=k\pi+\frac{\pi}{3}\ (k\in \boldsymbol{Z})$

$\therefore k=0$，$x=\frac{\pi}{3}$；$k=1$，$x=\frac{4\pi}{3}$；$k=2$，$x=\frac{7\pi}{3}$

又$\because f(x)=1$在$[0,m]$上有两个不同解

则$\frac{4\pi}{3}\le m<\frac{7\pi}{3}$

$\therefore m\in[\frac{4\pi}{3},\frac{7\pi}{3})$

另解：

（Ⅰ）若选择条件②

$\because f(x)=(a+1)\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1(a>0)$

$\because f(x)$图像与直线$y=-3$的两个相邻交点的距离等于π

且$f(x)$最大值为$a+1-1=a(a>0)$，则-3为$f(x)$的最小值

$\therefore -a-1-1=-3$，$\therefore a=1$

$\therefore f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$

$\therefore f(x)$最小正周期为$T=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$

（Ⅱ）$\because f(x)=1$，$\therefore 2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1=1$，$\therefore \sin(2x-\frac{\pi}{6})=1$

$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$(k\in \boldsymbol{Z})$，$\therefore x=k\pi+\frac{\pi}{3}$，$(k\in \boldsymbol{Z})$

$\therefore k=0$，$x=\frac{\pi}{3}$；$k=1$，$x=\frac{4\pi}{3}$；$k=2$，$x=\frac{7\pi}{3}$

又$\because f(x)=1$在$[0,m]$上有两个不同解

则$\frac{4\pi}{3}\le m<\frac{7\pi}{3}$，$\therefore m\in[\frac{4\pi}{3},\frac{7\pi}{3})$

另解：

（Ⅰ）选择条件③

$\because f(x)$的图像过点$(\frac{\pi}{6},0)$

$\therefore 0=(a+1)\sin(2\bullet\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6})-1$

$\therefore 0=\frac{1}{2}(a+1)-1$，$\therefore a=1$

$\therefore f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$

$\therefore f(x)$最小正周期为$T=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$

（Ⅱ）$\because f(x)=1$，$\therefore 2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1=1$，$\therefore \sin(2x-\frac{\pi}{6})=1$

$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$(k\in \boldsymbol{Z})$，$\therefore x=k\pi+\frac{\pi}{3}$，$(k\in \boldsymbol{Z})$

$\therefore k=0$，$x=\frac{\pi}{3}$；$k=1$，$x=\frac{4\pi}{3}$；$k=2$，$x=\frac{7\pi}{3}$

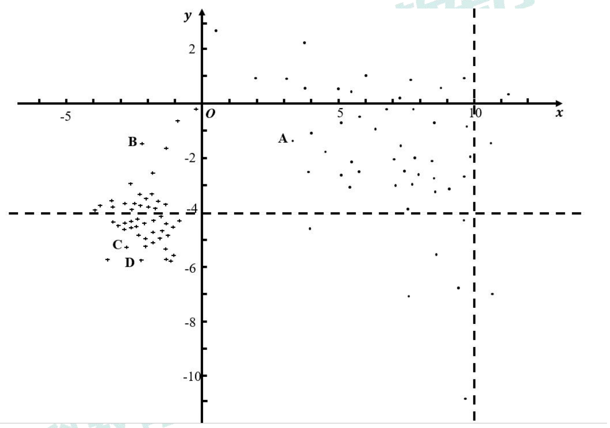
又$\because f(x)=1$在$[0,m]$上有两个不同解

则$\frac{4\pi}{3}\le m<\frac{7\pi}{3}$

$\therefore m\in[\frac{4\pi}{3},\frac{7\pi}{3})$

18.（本小题 14 分）

中国北斗卫星导航系统是中国自行研制的全球卫星导航系统，预计2020年北斗全球系统建设将全面完成.下图是在室外开放的环境下，北斗二代和北斗三代定位模块分别定位的50个点位的横、纵坐标误差的值，其中“•”表示北斗二代定位模块的误差的值，“＋”表示北斗三代定位模块的误差的值.（单位：米）



（Ⅰ）从北斗二代定位的50个点位中随机抽取一个，求此点横坐标误差的值大于10米的概率；

（Ⅱ）从图中 A，B，C，D 四个点位中随机选出两个，记 X 为其中纵坐标误差的值小于-4的点位的个数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）试比较北斗二代和北斗三代定位模块纵坐标误差的方差的大小.（结论不要求证明）

【解析】

（Ⅰ）由图知，在北斗二代定位的 50 个点中，横坐标误差的绝对值大于 10 米的有 3 个点，所以从中随机选出一点，此点横坐标误差的绝对值大于 10 米的概率为$\frac{3}{50}$=0.06.

（Ⅱ）由图知，A，B，C，D 四个点位中纵坐标误差的值小于-4的有两个点：C，D .

所以 X 所有可能取值为 0,1,2.

$P(X=0)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\frac{2}{3}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$；

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}=1$.

（III）北斗二代定位模块纵坐标误差的方差大于北斗三代.

19.（本小题 14 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其上、下顶点分别为 A，B，左、右焦点分别为 F_1，F_2，若四边形 AF_1BF_2 为正方形，且面积为 2.

（Ⅰ）求椭圆 E 的标准方程；

（Ⅱ）设存在斜率不为零且平行的两条直线 l_1，l_2，它们与椭圆 E 分别交于点 C，D，M，N，且四边形 $CDMN$ 是菱形，求出该菱形周长的最大值.

【解析】

（Ⅰ）根据题意有 $\begin{cases} b=c \\ 2bc=2 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=\sqrt{2} \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（Ⅱ）设 l_1 的方程为 $y=kx+m_1$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$

设 l_2 的方程为 $y=kx+m_2$，$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{2}+y^2=1 \\ y=kx+m_1 \end{cases}$，解得 $(1+2k^2)x^2+4km_1x+2m_1^2-2=0$

由$\Delta>0$得$16k^2m_1^2-4(1+2k^2)(2m_1^2-2)>0$，化简得$2k^2+1-m_1^2>0$ ①

$x_1+x_2=\dfrac{-4km_1}{1+2k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{2m_1^2-2}{1+2k^2}$

$$|CD|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\frac{-4km_1}{1+2k^2})^2-4\frac{2m_1^2-2}{1+2k^2}}$$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2k^2+1-m_1^2}}{1+2k^2}$$

同理可得$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2k^2+1-m_2^2}}{1+2k^2}$

因为四边形$CDMN$为菱形，所以$|CD|=|MN|$，所以$m_1^2=m_2^2$

又因为$m_1\neq m_2$，所以$m_1=-m_2$，所以l_1与l_2关于原点对称

又因为椭圆E关于原点对称

所以C，M关于原点对称，D，N关于原点对称

所以$\begin{cases}x_3=-x_1\\y_3=-y_1\end{cases}$且$\begin{cases}x_4=-x_2\\y_4=-y_2\end{cases}$

$\overrightarrow{MC}=(2x_1,2y_1)$，$\overrightarrow{ND}=(2x_2,2y_2)$

因为四边形$CDMN$为菱形

所以$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{ND}=0$，所以$x_1x_2+y_1y_2=0$

所以$x_1x_2+(kx_1+m_1)(kx_2+m_2)=0$

$$\Rightarrow(1+k^2)x_1x_2+km_1(x_1+x_2)+m_1^2=0\Rightarrow(1+k^2)\cdot\frac{2m_1^2-2}{1+2k^2}+km_1\cdot\frac{-4km_1}{1+2k^2}+m_1^2=0$$

化简得$3m_1^2-2k^2-2=0$

设菱形$CDMN$的周长为l，则

$$l=4|CD|=\frac{8\sqrt{2}\sqrt{1+2k^2}\cdot\sqrt{2k^2+1-m_1^2}}{1+2k^2}$$

$$=\frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}\sqrt{2+2k^2}\cdot\sqrt{1+4k^2}}{1+2k^2}\le\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\frac{1}{2}(2+2k^2+1+4k^2)}{1+2k^2}=4\sqrt{3}$$

当且仅当$2+2k^2=1+4k^2$即$k^2=\frac{1}{2}$时等号成立，此时${m_1}^2=1$，满足①

所以菱形周长的最大值为$4\sqrt{3}$

20.（本小题 15 分）

已知函数$f(x)=x(\ln x-ax)$ $(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若$a=1$，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（Ⅱ）若$f(x)$有两个极值点，求实数a的取值范围；

（Ⅲ）若$a>1$，求$f(x)$在区间$(0,2a]$上的最小值.

【解析】

（Ⅰ）$a=1$时，$f(x)=x(\ln x-x)$，所以$f(1)=-1$

$f'(x)=\ln x-2x+1$，　$f'(1)=-1$，

所以切线方程为$y=-(x-1)-1$即$y=-x$

（Ⅱ）方法一：

$f(x)$有两个极值点，即$f'(x)$有两个异号零点

$f'(x)=\ln x-2ax+1=0$

$2ax=\ln x+1$，即$2a=\frac{\ln x+1}{x}$

令$g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$

$g'(x)=\frac{1-\ln x-1}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$

$x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增

$x\in(1,+\infty)$，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减

$g(x)_{\max}=g(1)=1$，$g(\frac{1}{e})=0$，且$x>1$时，$g(x)>0$

所以当$0<2a<1$时，即$a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$f(x)$有两个极值点.

方法二：

$f'(x)=\ln x-2ax+1$

令$g(x)=\ln x-2ax+1$

$g'(x)=\frac{1}{x}-2a=\frac{1-2ax}{x}(x>0)$

① 当$a\le 0$时，$g'(x)\ge 0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$上单增

即$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单增，此时$f(x)$不可能有两个极值点

② 当$a>0$时，令$g'(x)=0$，$x=\frac{1}{2a}>0$

当$x\in\left(0,\frac{1}{2a}\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{2a}\right)$上单增，即$f'(x)$在$\left(0,\frac{1}{2a}\right)$上单增

当$x\in\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$上单减，即$f'(x)$在$\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$上单减

所以$f'(x)_{\max}=f'(\frac{1}{2a})=\ln(\frac{1}{2a})$

因为$f(x)$有两个极值点，

所以$\ln(\frac{1}{2a})>0$得$a<\frac{1}{2}$

$f'(\frac{1}{e})=\ln\frac{1}{e}-2a\bullet\frac{1}{e}+1=-\frac{2a}{e}<0$，$f'(\frac{1}{a^2})=-2\ln a-\frac{2}{a}+1<0$

所以当$0<a<\frac{1}{2}$时，存在$x_1\in\left(0,\frac{1}{2a}\right)$使$f(x_1)=0$，存在$x_2\in\left(\frac{1}{2a},\frac{1}{a^2}\right)$使$f(x_2)=0$

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$变化情况如下

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	**0**	$+$	**0**	$-$
$f(x)$	↘	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↘

符合题意，故a的范围是$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

（III）

方法一：

$a>1$时，由（II）知$\frac{\ln x+1}{x}<2a$

即$f'(x)=\ln x-2ax+1<0$

在$(0,2a]$上$f(x)_{\min}=f(2a)=2a(\ln 2a-2a^2)$

方法二：

$f(x)=x(\ln x-ax)$，$f'(x)=\ln x-2ax+1$

由（II）知$a>1$时，$f'(x)$在$\left(0,\frac{1}{2a}\right)$上单增，$\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$上单减

$f'(x)_{\max}=f'(\frac{1}{2a})=\ln(\frac{1}{2a})<0$

所以$f'(x)<0$在$(0,+\infty)$上恒成立

所以$f(x)$在$(0,2a]$上单调递减

所以$f(x)_{\min}=f(2a)=2a(\ln 2a-2a^2)$

21．（本小题 14 分）

数列 $A:x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$,对于给定的 $t(t>1,t\in\mathbf{N}_+)$，记满足不等式 $x_n-x_t\ge t^*(n-t)$ $(\forall n\in\mathbf{N}_+,n\ne t)$ 的 t^* 构成的集合为 $T(t)$.

（Ⅰ）若数列 $A:x_n{=}n^2$，写出集合 $T(2)$；

（Ⅱ）如果 $T(t)$ $(\forall t\in\mathbf{N}_+,t>1)$ 均为相同的单元素集合，求证：数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 为等差数列；

（Ⅲ）如果 $T(t)$ $(\forall t\in\mathbf{N}_+,t>1)$ 为单元素集合，那么数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 还是等差数列吗？如果是等差数列，请给出证明；如果不是等差数列，请给出反例.

【解析】

（Ⅰ）由于 $A:x_n{=}n^2$，$T(2)$ 为满足不等式 $x_n-x_t\ge t^*(n-t)$ $(\forall n\in\mathbf{N}_+)$ 的 t^* 构成的集合，

所以有：$n^2-4\ge t^*(n-2)$ $(\forall n\in\mathbf{N}_+,n\ne t)$，

当 $n>2$ 时，上式可化为 $n{+}2\ge t^*$，

所以 $5\ge t^*$，

当 $n{=}1$ 时，上式可化为 $3\le t^*$，

所以 $T(2)$ 为 $[3,5]$.

（Ⅱ）对于数列 $A:x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，若 $T(t)$ $(\forall t\in\mathbf{N}_+,t>1)$ 中均只有同一个元素，不妨设为 a，

下面证明数列 A 为等差数列，

当 $n=t+1$ 时，有 $x_{t+1}-x_t\ge a(\forall t>1)\cdots(1)$；

当 $n=t-1$ 时，有 $x_t-x_{t-1}\le a(\forall t>1)\cdots(2)$；

由于 (1)，(2) 两式对任意大于 1 的整数均成立，

所以有 $x_{t+1}-x_t=a(\forall t>1)$ 成立，从而数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 为等差数列.

（Ⅲ）

对于数列 $A:x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，不妨设 $T(i)=\{a\},T(j)=\{b\},1<i<j,a\ne b$，

由$T(i)=\{a\}$可知：$x_j-x_i\geq a(j-i)$，

由$T(j)=\{b\}$可知：$x_i-x_j\geq b(i-j)$，即$x_j-x_i\leq b(j-i)$，

从而$a(j-i)\leq x_j-x_i\leq b(j-i)$，

所以$a\leq b$，

设$T(i)=\{t_i\}$,，则$t_2\leq t_3\leq\cdots\leq t_n\leq\cdots$，

这说明如果$1<i<j$，则$t_i\leq t_j$，

因为对于数列$A:x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$，$T(t)\ (\forall t\in\mathbf{N}_+,t>1)$中均只有一个元素，

首先考查$t=2$时的情况，不妨设$x_2>x_1$，

因为$x_2-x_1\leq t_2$，又$T(2)$为单元素集，

所以$x_2-x_1=t_2$，

再证$t_3=x_3-x_2$，证明如下：

由t_3的定义可知：$t_3\geq x_3-x_2$，$t_3\geq\dfrac{x_3-x_1}{2}$，

所以$t_3=\max\left\{x_3-x_2,\dfrac{x_3-x_1}{2}\right\}$，

又由t_2的定义可知$x_3-x_2\geq t_2=x_2-x_1$，

所以$t_3\geq x_3-x_2\geq\dfrac{x_3-x_2+x_2-x_1}{2}=\dfrac{x_3-x_1}{2}$，

所以$x_3-x_2=t_3$，

若$t_3>t_2$，即$t_3=x_3-x_2>t_2$，

则存在正整数$m(m\geq 4)$，使得$(m-2)t_2=x_m-x_2\cdots\cdots(3)$，

由于$x_2-x_1=t_2\leq x_3-x_2\leq t_3\leq x_4-x_3\leq\cdots\leq x_k-x_{k-1}\leq t_k\leq\cdots$，

所以$x_m-x_2=\sum\limits_{i=3}^{m}(x_i-x_{i-1})\geq\sum\limits_{i=3}^{m}t_{i-1}>(m-2)t_2$，这与$(3)$矛盾，

所以$t_3=t_2$，

同理可证$t_2=t_3=t_4=t_5=\cdots$,

即数列$A:x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$为等差数列.