

2019 年北京市海淀区高三二模数学考试（文科）逐题解析

2019.5

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | 3 \leq x \leq 6\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $[1, 3]$ (B) $[3, 5]$ (C) $[5, 6]$ (D) $[1, 6]$

【答案】B

【解析】本题考查集合的运算.

$$\because A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}, B = \{x | 3 \leq x \leq 6\},$$

$$\therefore A \cap B = \{x | 3 \leq x \leq 5\},$$

$$\text{即 } A \cap B = [3, 5],$$

故选 B.

2. 复数 $z = a + i$ ($a \in \mathbf{R}$) 的实部是虚部的 2 倍, 则 a 的值为

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) -2 (D) 2

【答案】D

【解析】本题考查复数的概念.

$$\because z = a + i (a \in \mathbf{R}) \text{ 的实部为 } a, \text{ 虚部为 } 1,$$

实部是虚部的 2 倍,

$$\therefore a=2,$$

故选 D.

3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的右顶点和抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点重合, 则 a 的值为

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

【答案】B

【解析】本题考查双曲线和抛物线的几何性质.

$\because$ 抛物线的焦点和双曲线的右顶点重合,

抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 $(2, 0)$, 双曲线的右顶点为 $(a, 0)$,

$$\therefore a=2,$$

故选 B.

4. 若关于 x 的方程 $x + \frac{1}{x} = a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解, 则 a 的取值范围是

(A) $(0, +\infty)$

(B) $[1, +\infty)$

(C) $[2, +\infty)$

(D) $[3, +\infty)$

【答案】C

【解析】本题考查函数与方程.

由题意可知, 关于 x 的方程 $x + \frac{1}{x} = a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解,

可转化为在 $(0, +\infty)$ 上, $y = x + \frac{1}{x}$ 与 $y = a$ 有交点.

$\because$ 在 $(0, +\infty)$ 时, 由均值不等式可知, $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ (当且仅当 $x = \frac{1}{x}$ 时取等式成立)

$\therefore y = x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 2,

$\therefore a \geq 2$.

故选 C.

5. 某三棱锥的三视图如右图所示, 则该三棱锥的所有棱长构成的集合为

(A) $\{2, 4, 2\sqrt{3}, 6\}$

(B) $\{2, 4, 2\sqrt{5}, 4\sqrt{3}, 6\}$

(C) $\{2, 4, 2\sqrt{5}, 4\sqrt{2}, 6\}$

(D) $\{2, 4, 2\sqrt{5}, 4\sqrt{3}\}$

【答案】C

【解析】本题考三视图.

三视图还原如图所示,

由题易知: $AB = 2, PD = 4, BC = 4$,

$$\therefore PB = \sqrt{PD^2 + BD^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5};$$

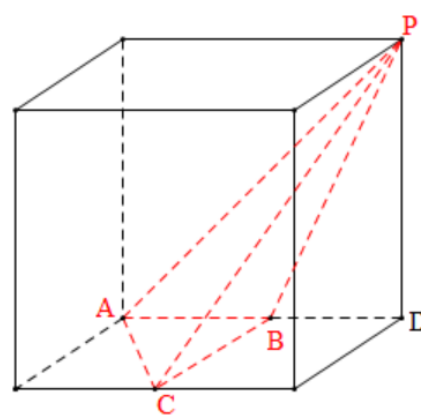
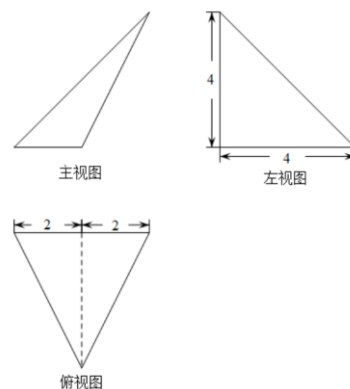
$$PA = \sqrt{PD^2 + AD^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2};$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5};$$

$$PC = \sqrt{PB^2 + BC^2} = \sqrt{20 + 16} = 6.$$

$\therefore$ 三棱锥所有棱长构成的集合为 $\{2, 4, 2\sqrt{5}, 4\sqrt{2}, 6\}$,

故选 C.



6. 把函数 $y = 2^x$ 的图象向右平移 t 个单位长度, 所得图象对应的函数解析式为 $y = \frac{2^x}{3}$,

则 t 的值为

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\log_2 3$

(C) $\log_3 2$

(D) $\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】本题考查图形变换.

由题: $y = 2^x \xrightarrow[t \text{ 个单位}]{\text{向右平移}} y = 2^{x-t},$

$$y = 2^{x-t} = \frac{2^x}{2^t} = \frac{2^x}{3},$$

$$\therefore 2^t = 3,$$

$$\therefore t = \log_2 3,$$

故选 B.

7. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$, 则“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ ”是“函数 $f(x)$ 的图象

经过点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ”的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】本题考查三角函数和充要条件

充分条件:

$$\because f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \omega = 1,$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} \omega = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\omega = 2 + 8k (k \in \mathbb{Z}),$$

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{4} (2 + 8k)$$

$$= \sin(\pi + 4k\pi)$$

$$= 0$$

∴充分条件成立;

必要条件:

$$\because f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} \omega = 0,$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} \omega = k\pi,$$

$$\therefore \omega = 2k (k \in \mathbb{Z}),$$

当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \omega$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2k\right)$$

$$= \sin \frac{k\pi}{2}$$

$$\therefore \text{当 } k \text{ 为偶数时 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

$$\text{当 } k \text{ 为奇数时 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ 或 } -1,$$

∴必要条件不成立.

综上:“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ ”是“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ”的充分而不必要条件.

故选 A.

8. 记 $x^2 + y^2 \leq 1$ 表示的区域为 W , 点 O 为原点, 点 P 为直线 $y = 2x - 2$ 上的一个动点. 若区域 W 上存在点 Q , 使得 $|OQ| = |PQ|$, 则 $|OP|$ 的最大值为

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

【答案】D

【解析】本题考查平面解析综合应用.

$|OQ| \leq 1$, 在 $\triangle OQP$ 中, $|OQ| + |QP| > |OP|$,

当且仅当 O, Q, P 三点共线时, 有 $|OQ| + |QP| = |OP|$.

$\therefore |OQ| = 1$ 时, $|OP|$ 取最大值 2,

故选 D.

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 已知直线 $l_1: x + y + 1 = 0$ 与 $l_2: x + ay + 3 = 0$ 平行, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, l_1 与 l_2 之间的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $1; \sqrt{2}$

【解析】 本题考查直线方程与两平行直线间距离.

$$\because l_1 // l_2,$$

$$\therefore 1 \times a - 1 \times 1 = 0,$$

$$\therefore a = 1.$$

$$\therefore l_2: x + y + 3 = 0,$$

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 之间的距离 } d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

10. 已知 $f(x) = (x+t)(x-t^2)$ 是偶函数, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0 或 1

【解析】 本题考查函数的性质.

$$\because f(x) \text{ 为偶函数},$$

$$\therefore f(x) = f(-x) \text{ 对任意 } x \in \mathbf{R} \text{ 恒成立},$$

$$\text{即 } f(x) = (x+t)(x-t^2) = x^2 - t^2x + tx - t^3; f(-x) = (-x+t)(-x-t^2) = x^2 + t^2x - tx - t^3,$$

$$\therefore -t^2x + tx = t^2x - tx,$$

$$\text{即 } 2t(t-1)x = 0, \text{ 解得 } t = 0 \text{ 或 } 1.$$

11. 已知 $a = \frac{1}{2}$, $b = \log_4 3$, $c = \sin \frac{\pi}{8}$, 则这三个数中最大的是_____.

【答案】 b

【解析】 本题考查函数单调性.

$\because \sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增,

$\therefore c = \sin \frac{\pi}{8} < \sin \frac{\pi}{6} = a$ 即 $c < a$.

$\because \log_4 x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore b = \log_4 3 > \log_4 2 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = a$, 即 $b > a$,

$\therefore c < a < b$,

$\therefore$ 三个数中最大的是 b .

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n}$, 且 $a_5 = 15$, 则 $a_8 =$ _____.

【答案】 24

【解析】 本题考查递推数列和数列求通项公式.

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n}$,

$\therefore \{\frac{a_n}{n}\}$ 为常数列, 设其为常数 c ,

则有 $\frac{a_5}{5} = \frac{a_8}{8} = c$.

将 $a_5 = 15$ 代入可得 $a_8 = 24$.

13. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2, BC=1$, 点 E 为 BC 的中点, 点 F 在线段 DC 上. 若

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AP}$, 且点 P 在直线 AC 上, 则 $|\overrightarrow{AF}| =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 本题考查平面向量坐标运算和模长运算.

建立如图所示直角坐标系,

则 $A(0,0), B(2,0), C(2,1), D(0,1), E(2, \frac{1}{2}),$

则 $\overrightarrow{AE} = (2, \frac{1}{2}), \overrightarrow{AC} = (2,1),$

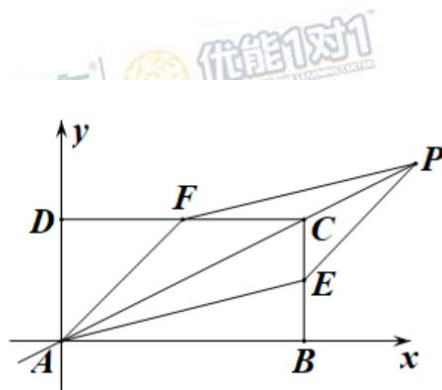
设 $\overrightarrow{AF} = (m,1)$, 则有 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = (2+m, \frac{3}{2}).$

又 $\because P$ 在直线 AC 上,

又 $\frac{2+m}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{1}$, 解得 $m=1,$

$\therefore \overrightarrow{AF} = (1,1),$

$\therefore |\overrightarrow{AF}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$



14. 已知集合 $A_0 = \{x | 0 < x < 1\}$. 给定一个函数 $y = f(x)$, 定义集合 $A_n = \{y | y = f(x), x \in A_{n-1}\},$

若 $A_n \cap A_{n-1} = \emptyset$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立, 则称该函数 $y = f(x)$ 具有性质 “ $\mathcal{G}$ ”.

(I) 具有性质 “ $\mathcal{G}$ ” 的一个一次函数的解析式可以是 _____;

(II) 给出下列函数: ① $y = \frac{1}{x}$; ② $y = 2^x$; ③ $y = \sin(\frac{\pi}{2}x) + 1$, 其中具有性质 “ $\mathcal{G}$ ” 的函

数的序号是 _____. (写出所有正确答案的序号)

【答案】 $y = x + 1$ (答案不唯一); ①②

【解析】

(I) 不妨设 $A_n = (x_1, x_2), y = ax + b (a > 0)$,

$$\therefore A_{n+1} = (ax_1 + b, ax_2 + b), A_{n+2} = (a^2x_1 + ab + b, a^2x_2 + ab + b),$$

$$\therefore \begin{cases} ax_1 + b \geq x_2 \\ a^2x_1 + ab + b \geq ax_2 + b \end{cases}$$

又 $\because A_0 = (0, 1), \therefore b \geq 1$,

$\therefore$ 可取 $a > 0, b \geq 1$.

(II) ① 易知 $A_1 = \{x | x > 1\}, A_2 = A_0, \therefore A_3 = A_1$, 成立.

② 由数学归纳法得, $A_0 = (0, 1), A_1 = (1, 2)$.

若 $A_n = (x_1, x_2), A_{n+1} = (2^{x_1}, 2^{x_2}), A_{n+2} = (2^{2^{x_1}}, 2^{2^{x_2}})$

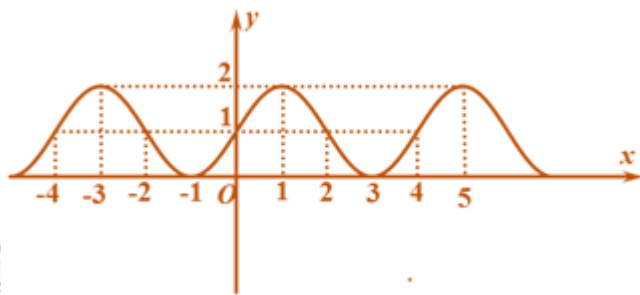
若 $2^{x_1} \geq x_2$, 易得 $2^{2^{x_1}} \geq 2^{2^{x_2}}$, 成立.

③ 易知 $A_0 = (0, 1)$

$\therefore A_1 = (1, 2), A_2 = (1, 2)$,

$\therefore n \geq 1$ 时, $A_n = (1, 2)$, 不具有性质“g”

$\therefore$ 填①②.



三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $a=7, b=8, A=\frac{\pi}{3}$.

(I) 求 $\sin B$ 的值;

(II) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【解析】

(I) 根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

$$\text{整理得到 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

(II) $\because \triangle ABC$ 为锐角三角形,

$$\therefore \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{1}{7},$$

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $C = \pi - A - B$,

$$\therefore \sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = 10\sqrt{3}.$$

16. (本小题满分 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 若 $a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 3^n$.

(I) 求公比 q 和 a_3 的值;

(II) 若 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 求证: $-3, S_n, a_{n+1}$ 成等差数列.

【解析】

(I) 易知 $q \neq 1$,

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = \frac{a_n \cdot q - a_{n-1} \cdot q}{a_n - a_{n-1}} = \frac{q(a_n - a_{n-1})}{a_n - a_{n-1}} = q = 3,$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 3a_n - a_n = 2a_n = 2 \cdot 3^n,$$

$$\therefore a_n = 3^n, n \geq 2,$$

$$\therefore \text{令 } n=1 \text{ 时 } a_1 q - a_1 = 2 \cdot 3, a_1 = 3,$$

$$\therefore a_n = 3^n, n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore a_3 = 27.$$

$$(II) S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{3(1-3^n)}{1-3} = \frac{3}{2}(3^n - 1),$$

$$S_n - (-3) = \frac{3^{n+1} - 3}{2} + 3 = \frac{3^{n+1} + 3}{2},$$

$$a_{n+1} - S_n = 3^{n+1} - \frac{3^{n+1} - 3}{2} = \frac{3^{n+1} + 3}{2},$$

$$\text{所以 } S_n - (-3) = a_{n+1} - S_n.$$

所以 $-3, S_n, a_{n+1}$ 成等差数列.

17. (本小题满分 14 分)

如图 1 所示,在等腰梯形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD$,
 $CE \perp AD$,垂足为 E , $AD = 3BC = 3$, $EC = 1$. 将
 $\triangle DEC$ 沿 EC 折起到 $\triangle D_1EC$ 的位置,使平面 $D_1EC \perp$
 平面 $ABCE$,如图 2 所示,点 G 为棱 AD_1 的中点.

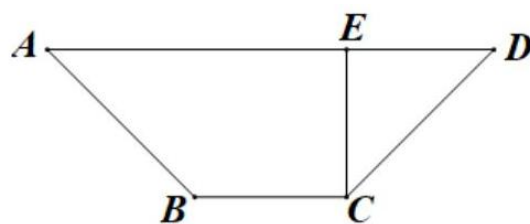


图1

(I) 求证:平面 $BG \parallel$ 平面 D_1EC ;

(II) 求证: $AB \perp$ 平面 D_1BE ;

(III) 求三棱锥 $D_1 - GBE$ 的体积.

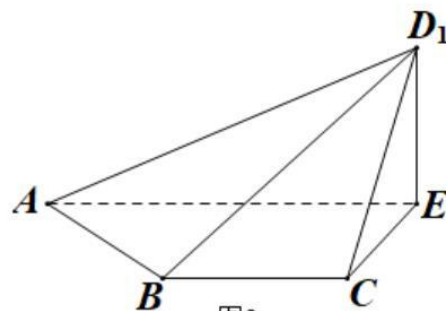


图2

【解析】

(I) 取 D_1E 中点为 M , 连结 BG, GM, CM ,

在等腰梯形 $ABCD$ 中,由 $BC \parallel AD, CE \perp AD, AD = 3BC = 3, EC = 1$,

$$\therefore MG \parallel AE, MG = \frac{1}{2} AE, \text{ 且 } BC \parallel AE, BC = \frac{1}{2} AE,$$

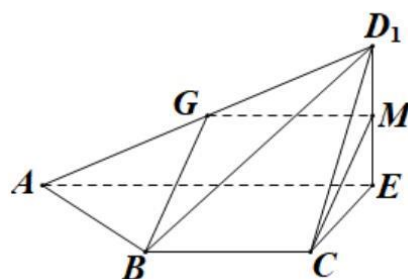
$$\therefore MG \parallel BC, MG = BC,$$

$\therefore$ 四边形 $BCMG$ 为平行四边形,

$$\therefore BG \parallel CM,$$

又 $\because CM \subset$ 平面 $D_1CE, BG \not\subset$ 平面 D_1CE ,

$$\therefore BG \parallel \text{平面 } D_1CE.$$



(II) 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD, CE \perp AD$,

$\therefore$ 折叠后 $CE \perp D_1E$.

又 $\because$ 平面 $D_1EC \perp$ 平面 $ABCE$,

且平面 $D_1EC \cap$ 平面 $ABCE = CE$,

$\therefore D_1E \perp \text{平面 } ABCE,$

$\therefore D_1E \perp AB.$

又 $\because$ 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD, CE \perp AD, AD = 3BC = 3, CE = 1,$

$\therefore AB = CD = \sqrt{2}, AE = 2, BE = \sqrt{2},$

满足 $BE^2 + AB^2 = AE^2,$

$\therefore AB \perp BE,$

又 $\because BE \cap D_1E = E, BE, D_1E \subset \text{平面 } D_1BE,$

$\therefore AB \perp \text{平面 } D_1BE.$

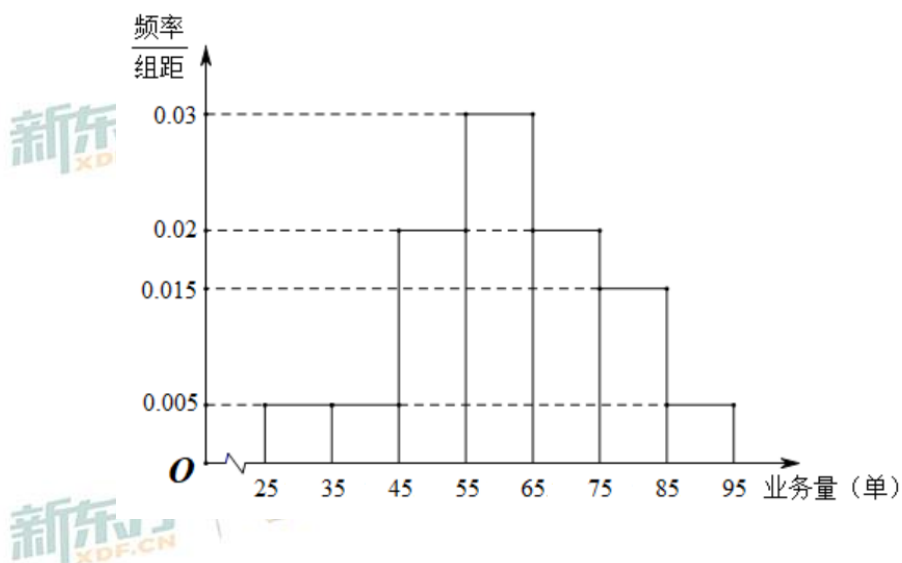
(III) $\because \triangle D_1EC$ 为直角三角形, 点 G 为棱 AD_1 的中点.

$S_{\triangle GD_1E} = \frac{1}{2} S_{\triangle D_1EC} = \frac{1}{2},$ 点 B 到平面 D_1GE 的距离为 $CE = 1,$

$\therefore V_{D_1-GBE} = V_{B-GD_1E} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{6}.$

18. (本小题满分 13 分)

某快餐连锁店招聘外卖骑手.该快餐连锁店提供了两种日工资方案:方案(1)规定每日底薪 50 元,快递业务每完成一单提成 3 元;方案(2)规定每日底薪 100 元,快递业务的前 44 单没有提成,从第 45 单开始,每完成一单提成 5 元.该快餐连锁店记录了每天骑手的人均业务量.现随机抽取 100 天的数据,将样本数据分为 $[25,35)$, $[35,45)$, $[45,55)$, $[55,65)$, $[65,75)$, $[75,85)$, $[85,95]$ 七组,整理得到如图所示的频率分布直方图.



- (I) 随机选取一天,估计这一天该连锁店的骑手的人均日快递业务量不少于 65 单的概率;
- (II) 若骑手甲、乙选择了日工资方案(1),丙、丁选择了日工资方案(2).现从上述 4 名骑手中随机选取 2 人,求至少有 1 名骑手选择方案(1)的概率;
- (III) 若仅从人均日收入的角度考虑,请你利用所学的统计学知识为新聘骑手做出日工资方案的选择,并说明理由.(同组中的每个数据用该组区间的中点值代替)

【解析】

(I) 记“一天该连锁店的骑手的人均日快递业务量不少于 65 单”为事件 M ,

由题意可得 $P(M) = (0.02 + 0.015 + 0.005) \times 10 = 0.4 = \frac{2}{5}$.

(II) 从甲、乙、丙、丁四人中随机选取 2 人,所有的可能性为:甲乙、甲丙、甲丁、乙丙、乙丁、丙丁,共 6 种情况.

因为骑手甲、乙选择了日工资方案 (1),丙、丁选择了日工资方案 (2),

所以,事件 A“至少有 1 名骑手选择方案 (1)”包括两种情况:

① 1 名骑手选择方案 (1),1 名骑手选择方案 (2) 的有:

甲丙、甲丁、乙丙、乙丁,共 4 种情况;

② 2 名骑手都选择方案 (1) 的有:甲乙,1 种情况;

因此,事件“至少有 1 名骑手选择方案 (1)”的概率为 $P(A) = \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6}$

(III) 现用同组中的每个数据用该组区间的中点值代替,

由题意可得,一名骑手日人均快递业务量的平均值为

$(0.005 \times 30 + 0.005 \times 40 + 0.02 \times 50 + 0.03 \times 60 + 0.02 \times 70 + 0.015 \times 80 + 0.005 \times 90)$

$\times 10 = 62$,

按方案 (1) 计算日薪资为: $50 + 62 \times 3 = 236$ 元,

按方案 (2) 计算日薪资为: $100 + (62 - 44) \times 5 = 190$ 元,

因为 $236 > 190$,所以选择方案 (1) 比较好.

19. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = e^x(ax^2 + x + 1)$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-2, f(-2))$ 处的切线的倾斜角;

(II) 若函数 $f(x)$ 的极大值大于 1, 求 a 的取值范围.

【解析】

$$(I) \quad f'(x) = e^x(ax^2 + x + 1) + e^x(2ax + 1) = e^x[ax^2 + (2a+1)x + 2] = e^x(ax+1)(x+2)$$

因为 $f'(-2) = 0$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-2, f(-2))$ 切线斜率为 0, 倾斜角为 0° .

(II) ①当 $a = 0$ 时, $f'(x) = e^x(x+2)$,

当 $x < -2$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > -2$ 时, $f'(x) > 0$,

此时 $f(x)$ 有极小值, 无极大值, 不合题意;

②当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{a}$, 则 $-\frac{1}{a} > 0 > -2$,

$f'(x), f(x)$ 随 x 变化情况如下表:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

此时 $f(x)$ 的极大值为 $f(-\frac{1}{a}) = e^{-\frac{1}{a}} > 1$, 符合题意;

③当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{a}$,

(i) 若 $-\frac{1}{a} = -2$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时,

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^x(x+2)^2 \geq 0 \text{ 恒成立,}$$

$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 无极大值, 不符合题意;

(ii) 若 $-\frac{1}{a} > -2$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时,

则 $f'(x), f(x)$ 随 x 变化情况如下表:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

此时 $f(x)$ 的极大值为 $f(-2) = \frac{4a-1}{e^2}$,

由 $\frac{4a-1}{e^2} > 1$ 解得 $a > \frac{e^2+1}{4}$,

又因为 $a > \frac{1}{2}$, 且 $\frac{e^2+1}{4} > \frac{1}{2}$, 所以 $a > \frac{e^2+1}{4}$;

(iii) 若 $-\frac{1}{a} < -2$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时,

则 $f'(x), f(x)$ 随 x 变化情况如下表:

x	$(-\infty, -\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a}, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

此时 $f(x)$ 的极大值为 $f(-\frac{1}{a}) = e^{-\frac{1}{a}} < 1$, 不合题意.

综上所述, 若函数 $f(x)$ 的极大值大于 1, 则 a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (\frac{e^2+1}{4}, +\infty)$.

20. (本小题满分 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左顶点 A 与上顶点 B 的距离为 $\sqrt{6}$.

(I) 求椭圆 C 的方程和焦点的坐标;

(II) 若点 P 在椭圆 C 上, 线段 AP 的垂直平分线分别与线段 AP , x 轴, y 轴交于不同的三点 M, H, Q .

(i) 求证: 点 M, Q 关于点 H 对称;

(ii) 若 $\triangle APQ$ 为直角三角形, 求点 P 的横坐标.

【解析】

(I) 由题意可知 $A(-2, 0), B(0, b)$,

$$|AB| = \sqrt{2^2 + b^2} = \sqrt{6}.$$

$$\therefore b^2 = 2$$

$$\text{所以椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2},$$

所以焦点坐标为 $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

(II) (i) 设 $P(m, n)$, P 点在椭圆上, 则有 $\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{2} = 1$,

$$AP \text{ 的中点 } M\left(\frac{m-2}{2}, \frac{n}{2}\right).$$

由题可知: AP 的斜率存在且不为 0,

$$\text{所以 } k_{AP} = \frac{n}{m+2}.$$

又因为 $AP \perp MQ$, 所以 $k_{AP} \cdot k_{MQ} = -1$,

$$\text{所以 } k_{MQ} = -\frac{m+2}{n},$$

$$\text{所以 } MQ \text{ 的方程为 } y - \frac{n}{2} = -\frac{m+2}{n}\left(x - \frac{m-2}{2}\right).$$

$$\text{令 } x=0 \text{ 可得 } y = -\frac{m+2}{n} \cdot \left(-\frac{m-2}{2}\right) + \frac{n}{2} = \frac{m^2-4}{2n} + \frac{n}{2} = \frac{-2n^2}{2n} + \frac{n}{2} = -\frac{n}{2},$$

$$\text{所以 } Q\left(0, -\frac{n}{2}\right).$$

$$\text{所以 } y_Q + y_M = -\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = 0 = 2y_H,$$

所以 H 是 M, Q 的中点, 所以点 M, Q 关于点 H 对称.

(ii) 因为 $\triangle APQ$ 为直角三角形, 且 $|PQ| = |AQ|$, 所以 $\triangle APQ$ 为等腰直角三角形,

$$\text{所以 } |AP| = \sqrt{2} |AQ|.$$

$$\text{因为 } P(m, n), Q(0, -\frac{n}{2}),$$

$$\text{即 } \sqrt{(m+2)^2 + n^2} = \sqrt{2} \sqrt{2^2 + \frac{n^2}{4}},$$

$$\text{化简, 得到 } 3m^2 + 16m - 12 = 0, \text{ 解得 } m = \frac{2}{3}, m = -6 \text{ (舍)}$$

$$\text{即点 } P \text{ 的横坐标为 } \frac{2}{3}.$$