2019 年北京市东城区高三一模数学考试（理科）逐题解析

2019.4

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,2x^2+x>0\}$, $B=\{x\,|\,2x+1>0\}$,则 $A\cap B=$

（A）$\{x\,|\,x>-\frac{1}{2}\}$　　（B）$\{x\,|\,x>\frac{1}{2}\}$

（C）$\{x\,|\,x>0\}$　　（D）$\mathbf{R}$

【答案】C

【解析】本题考查集合和不等式的运算.

解不等式 $2x^2+x>0$,解得 $x<-\frac{1}{2}$ 或 $x>0$,即 $A=\{x\,|\,x<-\frac{1}{2}$ 或 $x>0\}$

解不等式 $2x+1>0$,解得 $x>-\frac{1}{2}$,即 $B=\{x\,|\,x>-\frac{1}{2}\}$

所以 $A\cap B=\{x\,|\,x>0\}$

故选 C.

2. 在复平面内,若复数$(2-\mathrm{i})z$对应的点在第二象限,则z可以为

（A）2　　（B）-1　　（C）i　　（D）$2+\mathrm{i}$

【答案】B

【解析】本题考查复数的性质和运算.

因为复数$(2-\mathrm{i})z$对应的点在第二象限,所以实部小于0,虚部大于0

分别代入4个选项

A 选项:原式$=4-2\mathrm{i}$,此时实部大于 0,虚部小于 0,不满足条件;

B 选项:原式$=-2+\mathrm{i}$,此时实部小于0,虚部大于0,满足条件;

C 选项:原式$=1+2\mathrm{i}$,此时实部大于0,虚部大于0,不满足条件;

D 选项:原式$=4-\mathrm{i}^2=5$,此时实部大于0,虚部等于0,不满足条件.

故选 B.

3. 在平面直角坐标系xOy中,角α以Ox为始边,终边经过点$P(-1,m)(m\neq 0)$,则下列各式的值一定为负的是

（A）$\sin\alpha+\cos\alpha$　　（B）$\sin\alpha-\cos\alpha$

（C）$\sin\alpha\cdot\cos\alpha$　　（D）$\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

【答案】D

【解析】本题考查三角函数的性质.

角α的终边经过点$P(-1,m)(m\neq 0)$,则角α为第二或第三象限角

当角α为第二象限角时,$\sin\alpha>0,\cos\alpha<0,\tan\alpha<0$

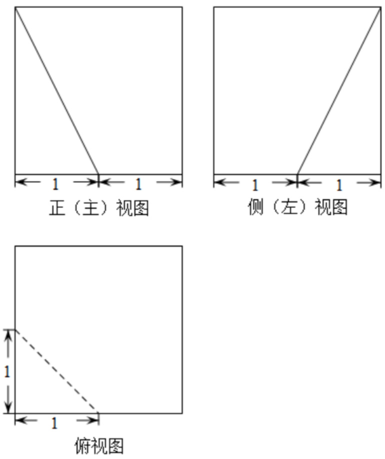
选项 C,D 一定成立;选项 A,B 不成立,排除

当角 α 为第三象限角时, $\sin\alpha<0,\cos\alpha<0,\tan\alpha>0$

选项 C 不成立,排除;选项 D 仍成立

故选 D.

4. 正方体被一个平面截去一部分后,所得几何体的三视图如图所示,则截面图形的形状为



（A）等腰三角形　　（B）直角三角形

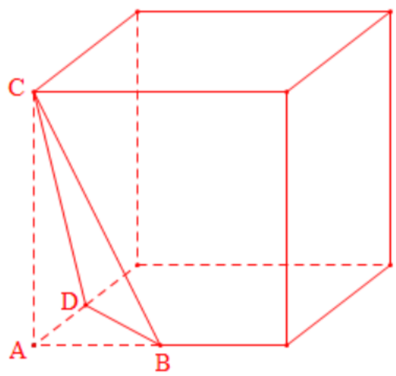
（C）平行四边形　　（D）梯形

【答案】A

【解析】本题考查三视图.

将三视图还原后如图所示,得到被截去三棱锥 $A-BCD$ 的正方体

由俯视图可知: $AD=AB=1$



由正视图和侧视图可知 CD, CB 均为直角边长为1和2的三角形的斜边,所以 $CD=CB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

所以截面图形 $\triangle BCD$ 为等腰三角形

故选 A.

5. 若 x,y 满足 $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ y+1\le 0 \\ y\ge 2x-6 \end{cases}$,则 $|x-y|$ 的最大值为

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）4

【答案】D

【解析】本题考查线性规划.

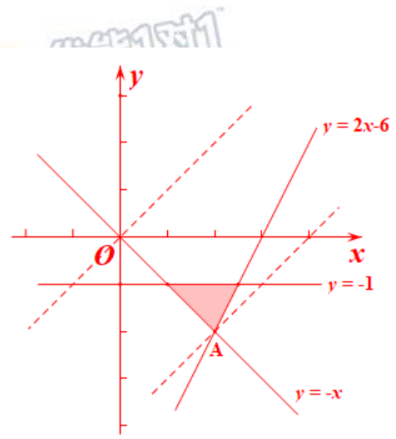
由可行域知 $x>y$

$\therefore |x-y|=x-y$

令 $x-y=z$

$y=x-z$

如图所示,通过平移可知当直线 $y=x-z$ 经过点 A 处时



直线的纵截距最小,此时 z 最大

$\begin{cases} y=-x \\ y=2x-6 \end{cases}$ 解得 $A(2,-2)$

$\therefore |x-y|=2-(-2)=4$

故选 D.

6. 已知直线 l 过抛物线 $y^2=8x$ 的焦点 F,与抛物线交于 A,B 两点,与其准线交于点 C,若点 F 是 AC 的中点,则线段 BC 的长为

（A）$\dfrac{8}{3}$　　（B）3　　（C）$\dfrac{16}{3}$　　（D）6

【答案】C

【解析】本题考查抛物线.

由题可知:$F(2,0)$,准线 $l:x=-2$

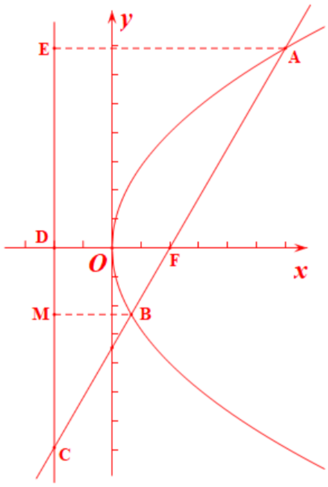
过点 A 作 $AE\perp l$

过 B 作 $BM\perp l$

l 与 x 轴交点为 D

$\because$ F 是 AC 中点

$\therefore$ 在 $\triangle ACE$ 中 DF 为中位线



$\therefore$ $AE = 2DF = 8$

由抛物线的定义:$AE = AF$, $BM = BF$

$\therefore$ $AF = 8$,$\therefore$ $AC = 16$

$\therefore$ $\angle ACE = 30^{\circ}$

$\because$ $BM = BF$

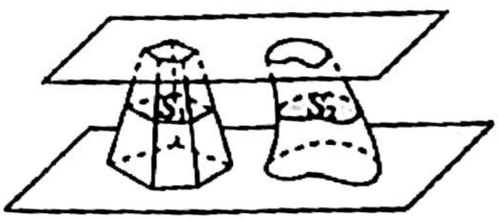
$\therefore$ $BC = 2BM = 2BF$ ①

$BC + BF = 8$②

由①②得 $BC = \dfrac{16}{3}$

故选 C.

7. 南北朝时代的伟大科学家祖暅在数学上有突出贡献,他在实践的基础上提出祖暅原理:"幂势既同,则积不容异".其含义是:夹在两个平行平面之间的两个几何体,被平行于这两个平面的任意平面所截,如果截得的两个截面的面积总相等,那么这两个几何体的体积相等.如图,夹在两个平行平面之间的两个几何体的体积分别为 V_1, V_2,被平行于这两个平面的任意平面截得的两个截面的面积分别为 S_1, S_2,则"V_1,V_2 相等"是"S_1,S_2 总相等"的



（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】本题考查充要条件.

充分条件:反例:两个完全相同的圆台

一正一倒放置在两平行平面之间

则 $V_1=V_2$ 无法保证 $S_1=S_2$

必要条件:若 $S_1=S_2$

由祖暅原理,则必有 $V_1=V_2$

故选 B.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1=a, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$,则下列关于 $\{a_n\}$ 的判断正确的是

（A）$\forall a>0, \exists n\geq 2$, 使得 $a_n<\sqrt{2}$

（B）$\exists a>0, \exists n\geq 2$, 使得 $a_n<a_{n+1}$

（C）$\forall a>0, \exists m\in\mathbf{N}^*$, 总有 $a_m<a_n(m\neq n)$

（D）$\exists a>0, \exists m\in\mathbf{N}^*$, 总有 $a_{m+n}=a_n$

【答案】D

【解析】本题考查数列的综合应用.

因为 $a_1=a, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$,

当 $a_n>0$ 时, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}>0$

则 $a>0$ 时,由数学归纳法可知, $\{a_n\}$ 为正数列.

由均值不等式得:$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}\geq\sqrt{2}$,当且仅当$a_n=\sqrt{2}$时等号成立,

此时$\forall n\in\mathbf{N}^*,a_n=\sqrt{2}$.故 A 错.

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}-\frac{a_n}{2}=\frac{2-a_n^{\ 2}}{2a_n}$,当$a_n\in(0,\sqrt{2})$时,$a_{n+1}>a_n$.

由 A 知$a_n\geq\sqrt{2}$,即$\{a_n\}$为每项都是$\sqrt{2}$的常数列,或递减的正数列.

故 B 错.

当$a=\sqrt{2}$时,对$\forall m\in\mathbf{N}^*$, $a_m=\sqrt{2}=a_n=a_{m+n}$, 故 C 错 D 对.

故选 D.

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 在 $(\sqrt{2}-x)^6$ 的展开式中，x^2 的系数为______.（用数字作答）

【答案】60

【解析】本题考查二项式定理.

$T_{r+1}=C_6^r(\sqrt{2})^{6-r}(-x)^r$，令 $r=2$ 得，$T_3=C_6^2(\sqrt{2})^4(-x)^2=60x^2$

$\therefore$ 系数为 60

10. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $b\cos C+c\sin B=0$，则 $\angle C=$______.

【答案】$\dfrac{3\pi}{4}$

【解析】本题考查解三角形.

由正弦定理得：$\sin B\cos C+\sin C\sin B=\sin B(\cos C+\sin C)=0$

$\because B\in(0,\pi)$

$\therefore \sin B\neq 0$

$\therefore \cos C+\sin C=0$，$\therefore \tan C=-1$

$\therefore C=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$

$\because C\in(0,\pi)$

$\therefore \angle C=\dfrac{3\pi}{4}$

11. 若曲线 $C:\begin{cases}x=a+\cos\theta,\\ y=2+\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）关于直线 $l:\begin{cases}x=1+t,\\ y=-2+2t\end{cases}$（$t$为参数）对称,则 $a=$______;此时原点 O 到曲线 C 上点的距离的最大值为______.

【答案】$a=3;\sqrt{13}+1$

【解析】本题考查参数方程与极坐标.

曲线 $C:(x-a)^2+(y-2)^2=1$,圆心坐标 $C(a,2)$, $r=1$

直线 $l:y=2x-4$

$\because$ 圆关于直线 l 对称

$\therefore$ 圆心在直线上

$\therefore y=2a-4=2$

$\therefore a=3$

$\therefore d_{\max}=|OC|+r=\sqrt{13}+1$

12. 已知向量 $\vec{a}=(1,\sqrt{3})$,向量 $\vec{b}$ 为单位向量,且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$,则 $2\vec{b}-\vec{a}$ 与 $2\vec{b}$ 夹角为______.

【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

【解析】本题考查平面向量数量积.

由题意得, $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, \vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $\cos<2\vec{b}-\vec{a},2\vec{b}>=\dfrac{4|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}{|2\vec{b}-\vec{a}|\cdot|2\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$

$\because$ 向量夹角为 $[0,\pi]$

$\therefore$ 夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$

13. 已知函数 $f(x)=4x-x^3$,若 $\forall x_1,x_2\in[a,b],x_1\neq x_2$, 都有 $2f(x_1+x_2)>f(2x_1)+f(2x_2)$ 成立,则满足条件的一个区间是______.

【答案】$(0,1)$

【解析】本题考查函数图象画法和凹凸性.

令 $2x_1=x_3,2x_2=x_4$

则有 $f(\frac{x_3+x_4}{2})>\frac{f(x_3)+f(x_4)}{2}$ 满足上凸函数定义

由于函数图象需在区间 $(0,2)$ 上是上凸的

因此 $2x_1,2x_2$ 只要在区间 $(0,2)$ 内

即 x_1,x_2 在区间 $(0,1)$ 内即可

14. 设 A,B 是 $\mathbf{R}$ 的两个子集,对任意 $x\in\mathbf{R}$,定义:$m=\begin{cases}0,x\notin A,\\1,x\in A,\end{cases}$ $n=\begin{cases}0,x\notin B,\\1,x\in B.\end{cases}$

①若 $A\subseteq B$, 则对任意 $x\in\mathbf{R}$, $m(1-n)=$______;

②若对任意 $x\in\mathbf{R}$, $m+n=1$,则 A,B 的关系为______.

【答案】$0;A=\complement_{\mathbf{R}}B$

【解析】本题考查集合的应用.

①因为 $A\subseteq B$, 可分为两种情况

1. $A=B$,此时对于任意的 $x\in\mathbf{R}$, $m=n=0$ 或 $m=n=1$,此时 $m(1-n)=0$

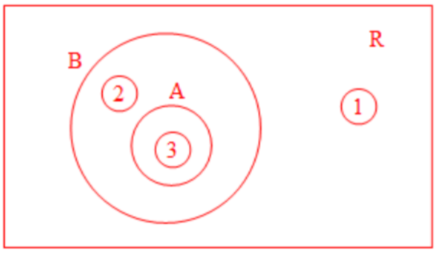
2. $A\subsetneqq B$,此时分为三种情况,由韦恩图:

【1】 $x\notin B,m=n=0$

【2】 $x\in\complement_B A,m=0,n=1$

【3】$x\in A, m=1, n=1$

经计算, $m(1-n)=0$



②根据题意, $m=0$时 $n=1$, $m=1$时 $n=0$

即 $x\in A$与 $x\in B$为对立事件

所以 $A=\complement_{R}B$

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=4a\cos x\sin(x-\frac{\pi}{6})$,且 $f(\frac{\pi}{3})=1$.

（Ⅰ）求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期;

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上单调递增,求 m 的最大值.

【解析】

（Ⅰ） $f(x)=4a\cos x(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6})$

$=4a\cos x(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x)$

$=2\sqrt{3}a\sin\cos x-2a\cos^2 x$

$=\sqrt{3}a\sin 2x-a\cos 2x-a$

$=2a\sin(2x-\frac{\pi}{6})-a$

$f(\frac{\pi}{3})=2a\sin(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6})-a=2a-a=a=1$

$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

（Ⅱ）因为 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$,

若 $f(x)$ 单调递增,则需满足 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得

$-\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为$[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi],k\in\mathbf{Z}$

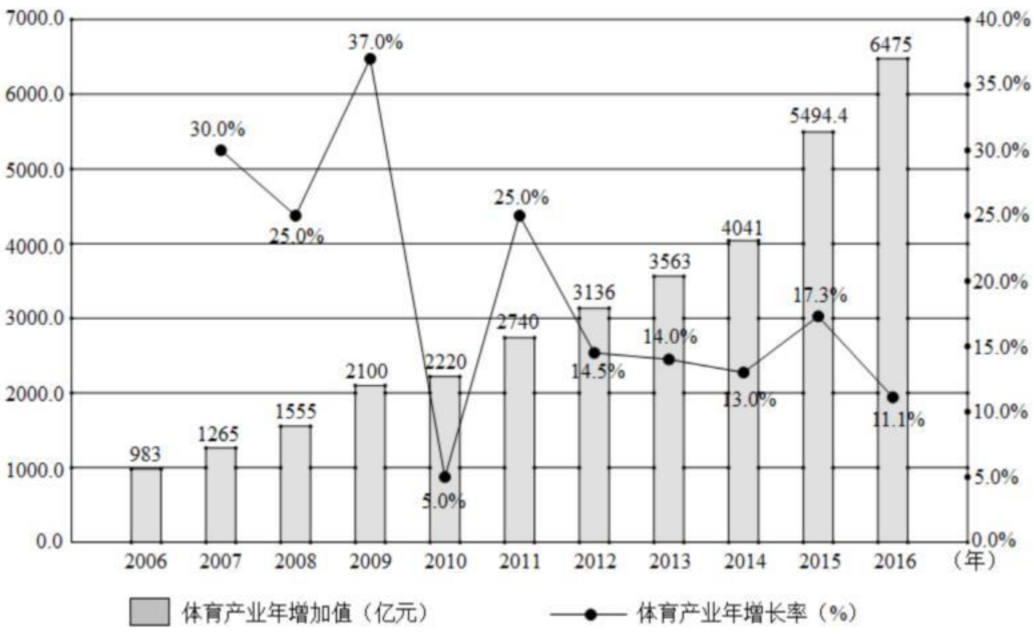
当 $k=0$ 时,函数 $f(x)$ 的单调增区间为$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$

若函数 $f(x)$ 在区间$[0,m]$上单调递增,则$[0,m]\subseteq[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$

所以实数 m 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$

16. （本小题满分 13 分）

改革开放 40 年来,体育产业蓬勃发展反映了“健康中国”理念的普及.下图是我国 2006 年至 2016 年体育产业年增加值及年增速图.其中条形图表示体育产业年增加值（单位:亿元）,折线图表示体育产业年增长率（%）.



（Ⅰ）从 2007 年至 2016 年随机选出 1 年,求该年体育产业年增加值比前一年的体育产业年增加值多 500 亿元以上的概率;

（Ⅱ）从 2007 年至 2016 年随机选出 3 年,设 X 是选出的三年中体育产业年增长率超过 20%的年数,求 X 的分布列与数学期望;

（III）由图判断,从哪年开始连续三年的体育产业年增长率方差最大?从哪年开始连续三年的体育产业年增加值方差最大?（结论不要求证明）

【解析】

（Ⅰ）2007 年至 2016 年的体育产业年增加值分别为

983,1265,1555,2100,2220,2740,3136,3563,4041,5494.4,6475;

其中年增加值比前一年的体育产业年增加值多 500 亿元以上的有 2009 年、2011 年、2015 年、2016 年,共 4 年;

记“这十年中年增加值比前一年的体育产业年增加值多 500 亿元以上”为事件 A,

所以 $P(A)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

（Ⅱ）由图知从 2007 年至 2016 年中,体育产业年增长率超过 20%的有 4 年,分别是 2007 年、2008 年、2009 年、2011 年,

所以, X 可能取得值为 0,1,2,3.

$$P(X=0)=\frac{C_4^0C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6};$$

$$P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2};$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10};$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30};$$

所以随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

所以随机变量 X 的数学期望为:$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$

（III）2008 年或 2009 年;2014 年

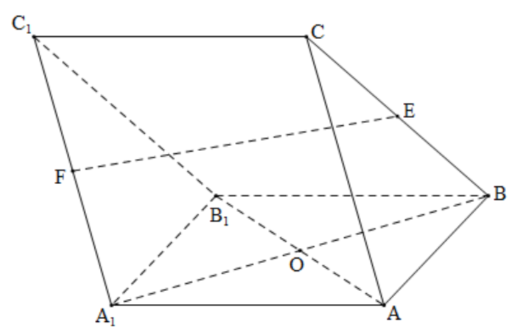
17. （本小题满分 14 分）

如图,在棱长均为2的三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,点 C 在平面 A_1ABB_1 内的射影 O 为 AB_1 与 A_1B 的交点, E,F 分别为 BC,A_1C_1 的中点.

（Ⅰ）求证:四边形 A_1ABB_1 为正方形;

（Ⅱ）求直线 EF 与平面 A_1ACC_1 所成角的正弦值;

（III）在线段 AB_1 上存在一点 D ,使得直线 EF 与平面 A_1CD 没有公共点,求 $\frac{AD}{DB_1}$ 的值.



【解析】

（Ⅰ）$\because O$ 为点 C 在平面 A_1ABB_1 内的射影

$\therefore CO\perp$ 平面 A_1ABB_1

在 $Rt\triangle OBC$ 和 $Rt\triangle OAC$ 中, $AC=BC,OC$ 边公用

$\therefore Rt\triangle OBC\cong Rt\triangle OAC$

$\therefore OA=OB$

$\because$ 三棱柱各边长为2

$\therefore$ 四边形 A_1ABB_1 为菱形

$\because OA=OB$

$\therefore AB_1=A_1B$

$\therefore$ 四边形 A_1ABB_1 为正方形

（Ⅱ）过点 O 作 $OM\perp AA_1, ON\perp AB$

由（Ⅰ）知 $CO\perp$ 平面 A_1ABB_1

所以 $CO\perp OM, CO\perp ON$

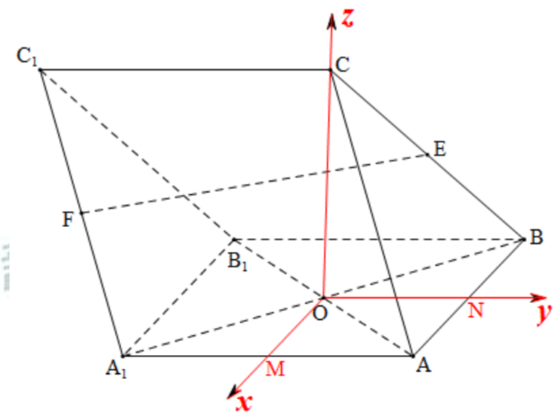
以 OM 为 x 轴, ON 为 y 轴, OC 为 z 轴,建立空间直角坐标系 $O-xyz$

如图所示,则 $O(0,0,0), A(1,1,0), B(-1,1,0)$, $B_1(-1,-1,0), A_1(1,-1,0)$, $C(0,0,\sqrt{2}), C_1(0,-2,\sqrt{2})$

$\because E$ 为 BC 中点

$\therefore E(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, F 为 A_1C_1 中点

$\therefore F(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$



$\therefore \overrightarrow{EF}=(1,-2,0), \overrightarrow{A_1A}=(0,2,0), \overrightarrow{AC}=(-1,-1,\sqrt{2})$

设平面 A_1ACC_1 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1A}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}2y_1=0\\ -x_1-y_1+\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$

取 $x_1=\sqrt{2}$,则 $y_1=0, z_1=1$

$\therefore \vec{m}=(\sqrt{2},0,1)$

设 EF 与平面 A_1ACC_1 所成角为 θ ,则

$$\sin\theta = |\cos < \vec{m}, \overrightarrow{EF} > | = \frac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{EF}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}}{15}$$

（III）设 $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB_1}, \lambda \in [0,1]$,则

$$\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} = (0,2,0) + \lambda(-2,-2,0) = (-2\lambda, 2-2,0)$$

$$\overrightarrow{EF} = (1,-2,0), \overrightarrow{A_1C} = (-1,1,\sqrt{2})$$

设平面 A_1DC 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$

则 $\begin{cases} \overrightarrow{A_1D}\cdot\vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{A_1C}\cdot\vec{n} = 0 \end{cases}$,即 $\begin{cases} -2\lambda\cdot x_2 + (2-2\lambda)y_2 = 0 \\ -x_2 + y_2 + \sqrt{2}z_2 = 0 \end{cases}$

取 $x_2 = 1-\lambda$,则 $y_2 = \lambda, z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\lambda$

则 $\vec{n} = (1-\lambda, \lambda, \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\lambda)$

$$\therefore \overrightarrow{EF}\cdot\vec{n} = 1\times(1-\lambda) - 2\times\lambda + 0\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\lambda = 1-\lambda-2\lambda = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{3} \in [0,1]$$

则 $AD = \dfrac{1}{3}AB_1$,

$$\therefore AD = \frac{1}{2}DB_1$$

$$\therefore \frac{AD}{DB_1} = \frac{1}{2}$$

18. （本小题满分 13 分）

设函数 $f(x)=ax^2+(a-2)x-\ln x$ 的极小值点为 x_0.

（Ⅰ）若 $x_0=1$,求 a 的值及 $f(x)$ 的单调区间;

（Ⅱ）若 $0<x_0<1$,在曲线 $y=f(x)$ 上是否存在点 P,使得点 P 位于 x 轴的下方?若存在,求出一个 P 点坐标;若不存在,说明理由.

【解析】

（Ⅰ） $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=2ax+a-2-\dfrac{1}{x}$

因为 $f(x)$ 有极小值点 $x_0=1$

所以 $f'(1)=2a+a-2-1=0$

解得 $a=1$,经检验符合题意

此时 $f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $-\dfrac{1}{2}$ （舍）

则 $f'(x), f(x)$ 随 x 的变化情况如下表:

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的单调减区间是 $(0,1)$,单调增区间是 $(1,+\infty)$

（Ⅱ）在曲线 $y=f(x)$ 上不存在点 P，使得点 P 位于 x 轴的下方.证明如下:

$f'(x)=2ax+a-2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(2x+1)(ax-1)}{x}, x\in(0,+\infty)$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{a}$ 或 $-\dfrac{1}{2}$（舍）

因为 $f(x)$ 的极小值点为 x_0，且 $0<x_0<1$

所以 $0<\dfrac{1}{a}<1$，即 $a>1$

则 $f'(x), f(x)$ 随 x 的变化情况如下表:

x	$(0,\dfrac{1}{a})$	$\dfrac{1}{a}$	$(\dfrac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 单调递减，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 单调递增

所以 $f(x)_{\min}=f(\dfrac{1}{a})=\dfrac{1}{a}+\dfrac{a-2}{a}-\ln\dfrac{1}{a}=1-\dfrac{1}{a}+\ln a$

因为 $a>1$

所以 $1-\dfrac{1}{a}>0, \ln a>0$

从而 $f(x)_{\min}=1-\dfrac{1}{a}+\ln a>0$，即曲线 $y=f(x)$ 恒在 x 轴的上方

所以在曲线 $y=f(x)$ 上不存在点 P，使得点 P 位于 x 轴的下方

19. （本小题满分 13 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4m}+\dfrac{y^2}{m}=1(m>0)$ 与 x 轴交于两点 A_1,A_2，与 y 轴的一个交点为 B，$\triangle BA_1A_2$ 的面积为 2.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程及离心率;

（Ⅱ）在 y 轴右侧且平行于 y 轴的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 P_1,P_2，直线 A_1P_1 与直线 A_2P_2 交于点 P. 以原点 O 为圆心，以 A_1B 为半径的圆与 x 轴交于 M,N 两点（点 M 在点 N 的左侧），求 $|PM|-|PN|$ 的值.

【解析】

（Ⅰ）因为 $m>0$，由椭圆方程知椭圆 C 是焦点在 x 轴的椭圆

故可得到: $a^2=4m,b^2=m,a=2\sqrt{m},b=\sqrt{m}$

$S_{\triangle BA_1A_2}=\dfrac{1}{2}\times 2ab=2\sqrt{m}\cdot\sqrt{m}=2m=2$，所以 $m=1$

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

由 $a=2,b=1,a^2=b^2+c^2$，得 $c=\sqrt{3}$

所以椭圆 C 的离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（Ⅱ）设点 $P(x_P,y_P),P_1(x_0,y_0),P_2(x_0,-y_0)(x_0>0)$，不妨设 $A_1(-2,0),A_2(2,0)$

设 $P_1A_1:y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2),P_2A_2:y=\dfrac{-y_0}{x_0-2}(x-2)$

由 $\begin{cases} y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2) \\ y=\dfrac{-y_0}{x_0-2}(x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P=\dfrac{4}{x_0} \\ y_P=\dfrac{2y_0}{x_0} \end{cases}$

即 $\begin{cases} x_0=\dfrac{4}{x_P} \\ y_0=\dfrac{x_0y_P}{2}=\dfrac{\frac{4}{x_P}y_P}{2}=\dfrac{2y_P}{x_P} \end{cases}$

因为 $\dfrac{x_0^{\ 2}}{4}+y_0^{\ 2}=1$,所以 $\dfrac{(\frac{4}{x_P})^2}{4}+\dfrac{4y_P^{\ 2}}{x_P^{\ 2}}=1$

化简得 $\dfrac{x_P^{\ 2}}{4}-y_P^{\ 2}=1(x_P>0)$

因为 $A_1(-2,0),B(0,1)$,所以 $|A_1B|=\sqrt{5}$,即 $M(-\sqrt{5},0),N(\sqrt{5},0)$

所以点 P 的轨迹为双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的右支,M,N 两点恰为其焦点,A_1,A_2 为双曲线的顶点,且 $|A_1A_2|=4$ 所以由双曲线定义可得 $|PM|-|PN|=4$

20. （本小题满分 14 分）

已知 $L \in \mathbf{N}^*$,数列 $A: a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的各项均为不大于 L 的正整数. c_k 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中 k 的个数 $(k=1,2,\cdots,L)$. 定义变换 T, T 将数列 A 变成数列 $T(A): t(a_1), t(a_2), \cdots, t(a_n)$, 其中 $t(k)=L\cdot\frac{c_1+c_2+\cdots c_k}{n}$.

（Ⅰ）若 $L=4$,对数列 $A: 1,1,2,3,3,4$,写出 $c_i (1 \le i \le 4)$ 的值;

（Ⅱ）已知对任意的 $k(k=1,2,\cdots,L)$,存在 A 中的项 a_m,使得 $a_m=k$.

求证: $t(a_i)=a_i (i=1,2,\cdots,n)$ 的充分必要条件为 $c_i=c_j (i,j=1,2,\cdots,L)$;

（Ⅲ）若 $L=n$,对于数列 $A: a_1, a_2, \cdots, a_n$,令 $T(T(A)): b_1, b_2, \cdots, b_n$.

求证: $b_i=t(a_i) (i=1,2,\cdots,n)$.

【解析】

（Ⅰ）$c_1=2, c_2=1, c_3=2, c_4=1$

（Ⅱ）证明:

已知对任意的正整数 $k(k=1,2,\cdots,L)$,存在 A 中的项 a_m,使得 $a_m=k$

所以 $c_1, c_2, \cdots, c_L$ 均不为零

必要性:若 $t(a_i)=a_i (1 \le i \le n)$,由于 $t(k)=L\cdot\frac{c_1+c_2+\cdots+c_k}{n}$

所以有 $t(1)=L\cdot\frac{c_1}{n}=1; t(2)=L\cdot\frac{c_1+c_2}{n}=2; t(3)=L\cdot\frac{c_1+c_2+c_3}{n}=3;$

…

$t(L)=L\cdot\frac{c_1+c_2+\cdots+c_L}{n}$

通过解此方程组,可得 $c_i = c_j(i, j = 1, 2, \cdots, L)$ 成立

充分性:若 $c_i = c_j(i, j = 1, 2, \cdots, L)$ 成立

不妨设 $h = c_i = c_j(i, j = 1, 2, \cdots, L)$,可以得到 $h \cdot L = n$

所以有:$t(1) = L \cdot \dfrac{h}{n} = 1; t(2) = L \cdot \dfrac{2h}{n} = 2; t(3) = L \cdot \dfrac{3h}{n} = 3;$

$\cdots$

$t(L) = L \cdot \dfrac{Lh}{n} = L$

所以 $t(a_i) = a_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 成立

（III）设 $A: a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的所有不同取值为 $u_1, u_2, \cdots, u_m$,且满足 $u_1 < u_2 < \cdots < u_m$

不妨设 $A: u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{1r_1}, u_{21}, u_{22}, \cdots, u_{2r_2}, \cdots, u_{m1}, u_{m2}, \cdots, u_{mr_m}$

其中 $u_{11} = u_{12} = \cdots = u_{1r_1}; u_{21} = u_{22} = \cdots = u_{2r_2}; \cdots; u_{m1} = u_{m2} = \cdots = u_{mr_m}$

又因为 $L = n$,根据变换 T 有:$t(u_{11}) = t(u_{12}) = \cdots = t(u_{1r_1}) = t(u_1) = L \cdot \dfrac{c_{u_1}}{n} = r_1$

$t(u_{21}) = t(u_{22}) = \cdots = t(u_{2r_2}) = t(u_2) = L \cdot \dfrac{c_{u_1} + c_{u_2}}{n} = r_1 + r_2$

$\cdots$

$t(u_{m1}) = t(u_{m2}) = \cdots = t(u_{mr_m}) = t(u_m) = L \cdot \dfrac{c_{u_1} + c_{u_2} + \cdots + c_{u_m}}{n} = r_1 + r_2 + \cdots r_m = L$

所以 $T(A): \underbrace{t(u_1), t(u_1), \cdots t(u_1)}_{r_1\text{个}}, \underbrace{t(u_2), t(u_2), \cdots t(u_2)}_{r_2\text{个}}, \cdots, \underbrace{t(u_m), t(u_m), \cdots t(u_m)}_{r_m\text{个}}$

即 $T(A): \underbrace{r_1, r_1, \cdots r_1}_{r_1\text{个}}, \underbrace{r_1 + r_2, r_1 + r_2, \cdots r_1 + r_2}_{r_2\text{个}}, \cdots, \underbrace{L, L, \cdots, L}_{r_m\text{个}}$

所以 $T(T(A)):\underbrace{t(r_1),t(r_1),\cdots t(r_1)}_{r_1个},\underbrace{t(r_1+r_2),t(r_1+r_2),\cdots t(r_1+r_2)}_{r_2个},\cdots,\underbrace{t(L),t(L),\cdots,t(L)}_{r_m个}$

因为 $r_1<r_1+r_2<\cdots<r_1+r_2+\cdots r_m$

所以有 $t(r_1)=r_1,t(r_1+r_2)=r_1+r_2,\cdots,t(r_1+r_2+\cdots r_m)=L$

因此, $b_1=b_2=\cdots=b_{r_1}=r_1,b_{r_1+1}=b_{r_2+1}=\cdots=b_{r_1+r_2}=r_1+r_2,\cdots,$

$b_{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}+1}=b_{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}+2}=\cdots=b_n=r_1+r_2+\cdots r_m=L$

即 $T(T(A)):\underbrace{r_1,r_1,\cdots r_1}_{r_1个},\underbrace{r_1+r_2,r_1+r_2,\cdots r_1+r_2}_{r_2个},\cdots,\underbrace{L,L,\cdots,L}_{r_m个}$

从而则 $b_i=t(a_i)(i=1,2,\cdots,n)$

因此结论成立