2019 年北京市西城区高三二模数学考试（理科）逐题解析

2019.5

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设集合 $A=\{x\mid \frac{1}{x}>1\}$, $B=\{-2,\frac{1}{2},3\}$,则 $A\cap B=$

（A）$\{-2,\frac{1}{2}\}$　（B）$\{\frac{1}{2}\}$　（C）$\{\frac{1}{2},3\}$　（D）$\varnothing$

【答案】B

【解析】本题考查集合的运算.

由 $\frac{1}{x}>1$ 得集合 $A=\{x\mid 0<x<1\}$, $A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$,故选 B.

2. 若复数 $z=\mathrm{i}\cdot(a-\mathrm{i})$ 满足 $|z|\geq 2$,则实数 a 的取值范围是

（A）$[\sqrt{3},+\infty)$　（B）$[-1,1]$

（C）$(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$　（D）$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

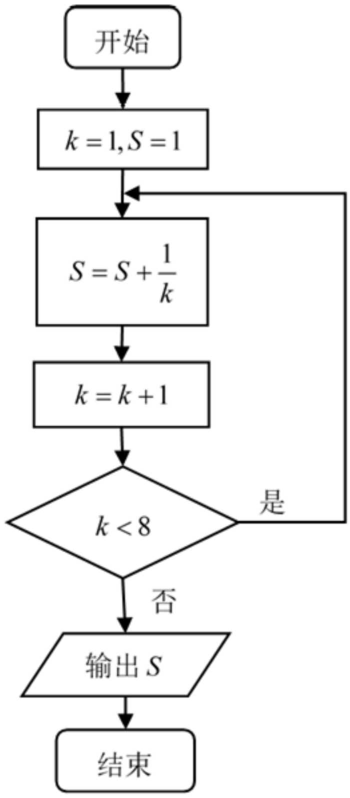
【答案】C

【解析】本题考查复数的运算.

$z=\mathrm{i}\cdot(a-\mathrm{i})=1+a\mathrm{i}$, $|z|=\sqrt{1+a^2}\geq 2$,解得 $a\geq\sqrt{3}$ 或 $a\leq-\sqrt{3}$.

故选 C.

3. 执行如图所示的程序框图,则输出的S值等于



（A）$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}$

（B）$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{7}$

（C）$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}$

（D）$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{7}$

【答案】D

【解析】本题考查算法初步与程序框图.

$\because k=1, S=1$,按照程序框图得:

$S=1+1, k=2$;

$S=1+1+\frac{1}{2}, k=3$;

$S=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, k=4$;

$S=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, k=5$;

$S=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{5}, k=6$;

$S=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{6}, k=7$;

$S=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{7}. k=8$.

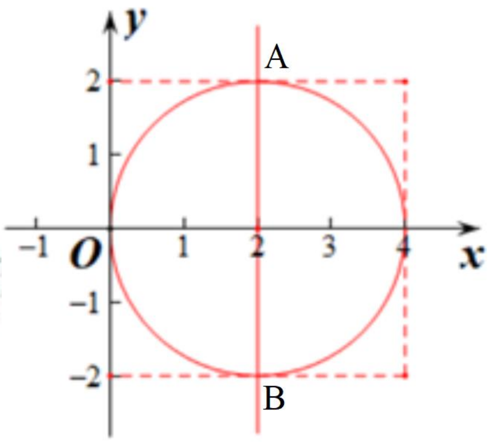
故选 D.

4. 在极坐标系中,直线 $\rho\cos\theta=2$ 与圆 $\rho=4\cos\theta$ 交于 A,B 两点,则 $|AB|=$

（A） 4　　（B） $2\sqrt{3}$　　（C） 2　　（D） $\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】本题考查极坐标.



$\because$ 在极坐标中 $\rho\cos\theta=x$,

$\therefore$ 直线 $\rho\cos\theta=2$ 即为直线 $x=2$.

由 $\rho=4\cos\theta$ 得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$,即 $x^2+y^2=4x$,

整理得 $(x-2)^2+y^2=4$,圆心为 $(2,0)$,半径 $r=2$.

由图可知,直线过圆心,所以 $|AB|=2r=4$.故选 A.

5. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,则“函数 $y=|f(x)|$ 的图象关于 y 轴对称”是“函数 $f(x)$ 为奇函数”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】本题考查奇函数的性质与充要条件.

充分条件:

$\because$ $y=|f(x)|$ 图象关于 y 轴对称,

$\therefore$ $|f(-x)|=|f(x)|$,

$\therefore$ $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(x)$,

$\therefore$ 充分条件不成立.

必要条件:

$\because$ $y=f(x)$ 是奇函数,

$\therefore |f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$,

$\therefore y=|f(x)|$图象关于y轴对称,

$\therefore$必要条件成立.

故“函数$y=|f(x)|$的图象关于y轴对称”是“函数$f(x)$为奇函数”的必要而不充分条件.

故选 B.

6. 若实数x,y,z互不相等,且满足$2^x=3^y=\log_4 z$,则

（A） $z>x>y$ （B） $z>y>x$

（C） $z>x,z>y$ （D） $x>y,x>z$

【答案】C

【解析】本题考查指数函数与对数函数的图象与性质.

令 $f(t)=2^t,g(t)=3^t,h(t)=\log_4 t$,

根据函数单调性,作出 $f(t),g(t),h(t)$的函数图象.

设$m=2^x=3^y=\log_4 z$,

当$0<m<1$时,

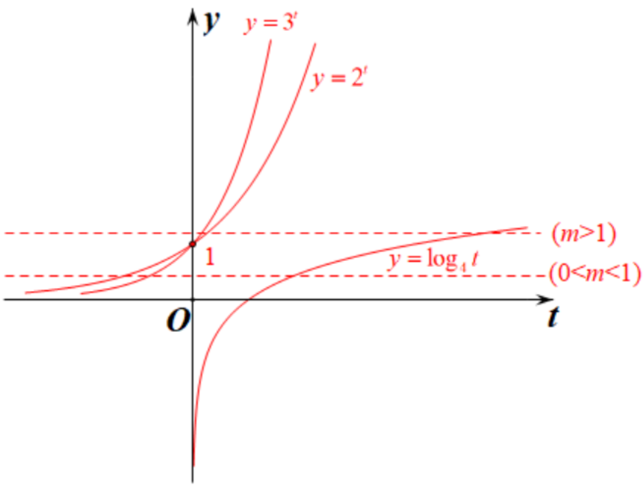
由图象可知从左往右依次是 $f(t),g(t),h(t)$,

$\therefore z>y>x$.

当$m>1$时,

由图象可知从左往右依次是$g(t),f(t),h(t)$,

$\therefore z>x>y$.



由以上两种情况z的值最大,x,y的大小关系不能确定.

综上:$z>x,z>y$.

故选 C.

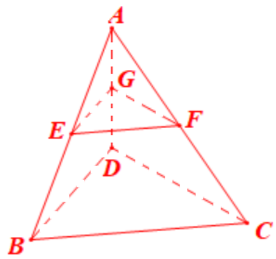
7. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长1,平面 α 与该正四面体相交,对于实数 $d(0<d<1)$,记正四面体 $ABCD$ 的四个顶点中到平面 α 的距离等于 d 的点的个数为 m,那么下列结论中正确的是

（A）m 不可能等于 2　　（B）m 不可能等于 3

（C）m 不可能等于 4　　（D）以上三个答案都不正确

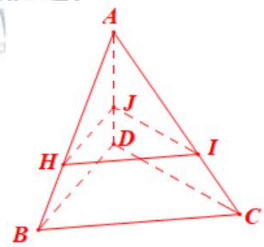
【答案】D

【解析】本题考查空间几何体中点到平面的距离.

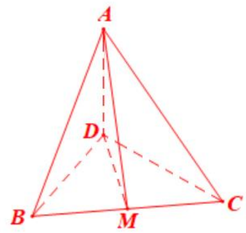


如图,在正四面体 $A-BCD$ 中, A 为顶点.

①取 AB,AC,AD 的中点分别为 E,F,G 平面 EFG // 平面 BCD,且 A,B,C,D 四个顶点到平面 EFG 的距离相等, $d=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$, $m=4$;



②取 AB,AC,AD 的靠近底面的三等分点,分别为 H,I,J ,平面 HIJ // 平面 BCD,且 B,C,D 三个顶点到平面 EFG 的距离相等, $d=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$, $m=3$;



③取 BC 中点为 M ,连接 ADM ,平面 $ADM\perp$ 底面 BCD,且 B,C 到平面 ADM 距离相等, $d=\dfrac{1}{2}$, $m=2$.

故选 D.

8. 设 f 是直角坐标平面 xOy 到自身的一个映射，点 $P(x,y)$ 在映射 f 下的象为点 $Q(-\frac{y}{2},\frac{x}{2})$，记作 $Q=f(P)$. 已知 $P_1(16,8)$，$P_{n+1}=f(P_n)$，其中 $n=1,2,3,\cdots$. 那么对于任意的正整数 n，

（A）存在点 M，使得 $|MP_n|\le 10$

（B）不存在点 M，使得 $|MP_n|\le 5\sqrt{5}$

（C）存在无数个点 M，使得 $|MP_n|\le 6\sqrt{5}$

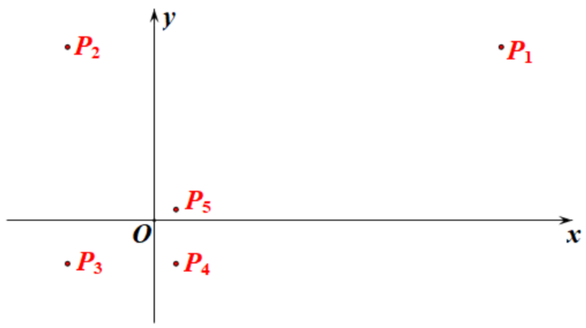
（D）存在唯一的点 M，使得 $|MP_n|\le 8\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】本题考查函数映射的综合运用.

$P_1(16,8),P_2(-4,8),P_3(-4,-2),P_4(1,-2),P_5(1,\frac{1}{2}),\cdots,P_i$

随着 i 的增大，P_i 到原点的距离减小，



由图可知，

$P_i,P_j(i,j=1,2,3,\cdots)$ 两点间的最大距离为

$|P_iP_j|_{\max}=P_1P_3=\sqrt{(16+4)^2+(8+2)^2}=10\sqrt{5}.$

故点 $P_i(i=1,2,3,\cdots)$ 均在以 P_1P_3 为直径的圆内.

故选 C.

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 在二项式 $(1-x)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为________.

【答案】10

【解析】本题考查二项式定理.

$T_{r+1}=C_5^r\cdot 1^{5-r}\cdot(-x)^r$,

依题意得 $r=2$,

则 x^2 系数为 $C_5^2\times 1^3=10$.

10. 以椭圆 $C:\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 在 x 轴上的顶点和焦点分别为焦点和顶点的双曲线方程为________;此双曲线的渐近线方程为________.

【答案】$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$; $y=\pm 2x$

【解析】本题考查椭圆和双曲线的性质.

椭圆 C 在 x 轴上的顶点为 $(-\sqrt{5},0),(\sqrt{5},0)$,焦点为 $(-1,0),(1,0)$.

以 $(-1,0),(1,0)$ 为顶点, $(-\sqrt{5},0),(\sqrt{5},0)$ 为焦点的双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$,

渐近线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$,

$\because a=1, b=2$,

$\therefore$ 渐近线方程为 $y=\pm 2x$.

11. 在$\triangle ABC$中,若$a=\sqrt{2}b,b=\sqrt{2}c$,则三个内角中最大角的余弦值为______.

【答案】$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】本题考查余弦定理的应用.

在$\triangle ABC$中,

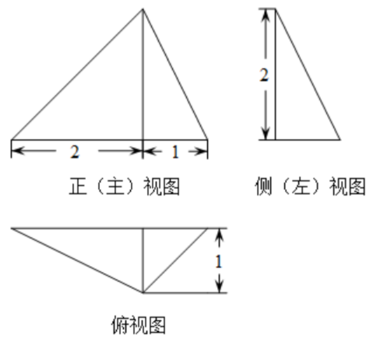
$\because a,b,c>0,a=\sqrt{2}b$,则$a>b$,同理得$b>c$,则$a>b>c$.

由“大边对大角”可知,最大角为A.

$\because b=\sqrt{2}c,c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$,

$$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+\frac{1}{2}b^2-2b^2}{2b\times\frac{\sqrt{2}}{2}b}=\frac{-\frac{1}{2}b^2}{\sqrt{2}b^2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

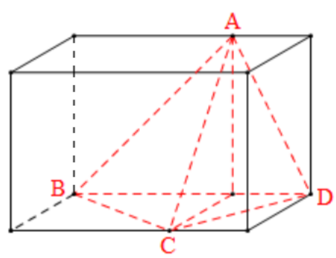
12. 某三棱锥的三视图如图所示,则在该三棱锥表面的四个三角形中,等腰三角形的个数为______.



【答案】2 个

【解析】本题考查三视图的还原.

三视图还原如图所示,设为三棱锥$A-BCD$,



易得$AB=2\sqrt{2},AC=\sqrt{5},AD=\sqrt{5},BC=\sqrt{5},BD=3,CD=\sqrt{2}$,

$\therefore \triangle ABC$和$\triangle ACD$为等腰三角形.

故在该三棱锥表面的四个三角形中,等腰三角形的个数为2个.

13. 能说明“设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$,若$a_{n+1}>a_n$,则$S_{n+1}>S_n$”为假命题的一个等差数列是______.（写出数列的通项公式）

【答案】$a_n=n-2$（答案不唯一）

【解析】本题考查等差数列的性质.

$\because a_{n+1}>a_n$,

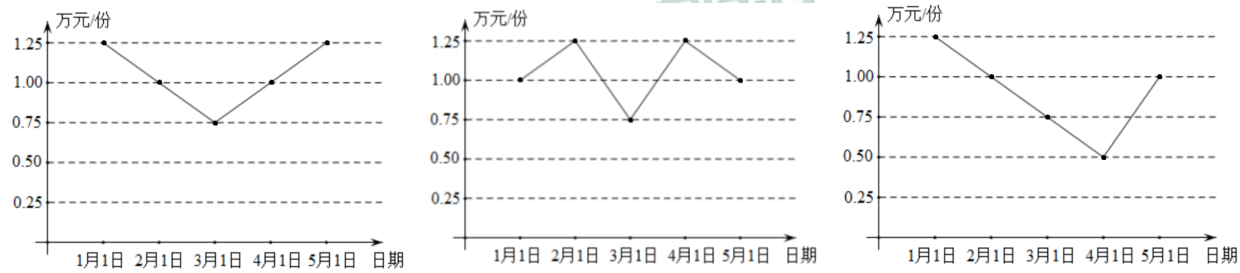
$\therefore$数列为单调递增数列,

又$\because S_{n+1}>S_n$,当$n=2$时,$S_2-S_1=a_2>0$,数列为等差数列,

满足$a_2\le 0$即是假命题.

开放性试题答案不唯一.

14. 因市场战略储备的需要,某公司从 1 月 1 日起每月 1 日购买了相同金额的某种物资,连续购买了 4 次.由于市场变化,5 月 1 日该公司不得不将此物资全部卖出.已知该物资的购买和卖出都是以份为计价单位进行交易,且该公司在买卖的过程中没有亏本,那么下面三个折线图中反映了这种物资每份价格（单位:万元）的可能变化情况的是______.（写出所有正确的图表序号）



图①　图②　图③

【答案】①③

【解析】本题考查了平均值的相关知识.

可设每次购买金额为m万元.

对于①,不难看出获利;

对于②, $\bar{x}=\dfrac{4m}{\dfrac{m}{1}+\dfrac{m}{1.25}+\dfrac{m}{0.75}+\dfrac{m}{1.25}}=\dfrac{60}{59}>1$,所以亏损;

对于③, $\bar{x}=\dfrac{4m}{\dfrac{m}{1.25}+\dfrac{m}{1}+\dfrac{m}{0.75}+\dfrac{m}{0.5}}=\dfrac{60}{77}<1$,所以盈利.

故选①③.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{6})+2\sin x\cos x$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

（Ⅱ）将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位,得到的图象对应的函数解析式为 $g(x)$,求 $g(x)$ 的单调增区间.

【解析】

（Ⅰ）$\because f(x)=\cos 2x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin 2x\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\sin 2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+\sin 2x$

$=\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

$\therefore T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知, $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$,

$\therefore g(x)=\sqrt{3}\sin[2(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{6}]=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{5\pi}{6})$.

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{5\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

得$-\frac{2\pi}{3}+k\pi\le x\le-\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore g(x)$的单调增区间为$[-\frac{2\pi}{3}+k\pi,-\frac{\pi}{6}+k\pi],k\in\mathbf{Z}$.

16.（本小题满分13分）

10月1日,某品牌的两款最新手机（记为W型号,T型号）同时投放市场.手机厂商为了解这两款手机的销售情况,在10月1日当天,随机调查了5个手机店中这两款手机的销量（单位:部）,得到下表.

手机店	A	B	C	D	E
W型号手机销量	6	6	13	8	11
T型号手机销量	12	9	13	6	4

（Ⅰ）若在10月1日当天,从这A、B两个手机店售出的新款手机中分别随机抽取1部,求抽取的2部手机中至少有1部为W型号手机的概率;

（Ⅱ）现从这5个手机店中任选3个举行促销活动,用X表示其中W型号手机销量超过T型号手机销量的手机店的个数,求随机变量X的分布列和数学期望;

（Ⅲ）经测算,W型号手机销量成本η（百元）与销量ξ（部）满足关系$\eta=3\xi+4$.若表中W型号手机销量的方差$s_0^2=m(m>0)$,试给出表中5个手机店的W型号手机销售成本的方差s^2的值.（用m表示,结论不要求证明）

【解析】

（Ⅰ）将从 A、B 两个手机店售出的新款手机中分别随机抽取 1 部记为甲和乙,

记事件“甲手机为 T 型号手机”为 M_1,

记事件“乙手机为 T 型号手机”为 M_2,

依题意,有 $P(M_1)=\dfrac{12}{6+12}=\dfrac{2}{3}$,$P(M_2)=\dfrac{9}{6+9}=\dfrac{3}{5}$,且事件 M_1,M_2 相互独立.

记事件“抽取的 2 部手机至少有 1 部为 W 型号手机”为 M .

则 $P(M)=1-P(M_1\cdot M_2)=1-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{5}$.

即抽取的 2 部手机中至少有 1 部为 W 型号手机的概率为 $\dfrac{3}{5}$.

（Ⅱ）由表可知,W 型号手机销量超过 T 型号手机销量的手机店共有 2 个,

故 X 的所有可能取值有:0,1,2.

且 $P(X=0)=\dfrac{C_2^0C_3^3}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}$;$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{5}$;$P(X=2)=\dfrac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$.

所以随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{3}{10}$

故 $E(X)=0\times\dfrac{1}{10}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{6}{5}$.

（Ⅲ）$s^2=9m$.

17.（本小题满分 14 分）

如图 1,在平行四边形 $ABCD$ 中,E,F 分别为 AD,AB 的中点,$AD=4,AB=4\sqrt{2}$,$\angle A=45^\circ$,将$\triangle AEF$ 沿 EF 折起到$\triangle A_1EF$ 位置,使得平面 $A_1EF\perp$平面 $BCDEF$,如图 2.记 A_1C 的中点为 M.

（Ⅰ）求证:$A_1E\perp CD$;

（Ⅱ）求二面角 $M-DB-C$ 的大小;

（Ⅲ）设 N 为线段 A_1D 上的一点,试给出点 N 满足的一个条件,使得平面 $NEF//$平面 MBD,并证明你的结论.

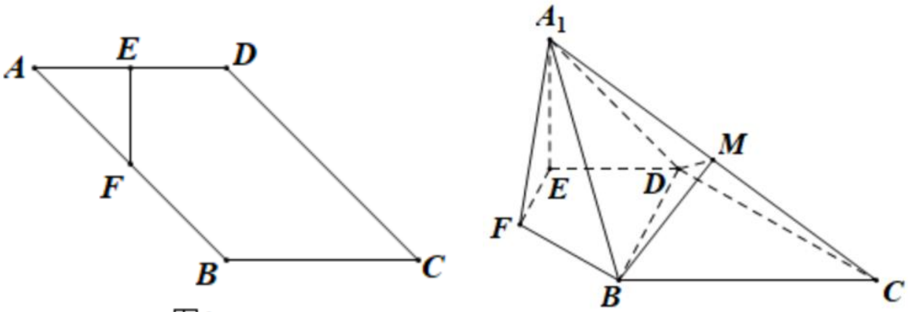


图1　　图2

【解析】

（Ⅰ）在图 1 中,由 $AE=2,AF=2\sqrt{2},\angle A=45^\circ$,得 $AE\perp EF$.

$\therefore$在图 2 中 $A_1E\perp EF$.

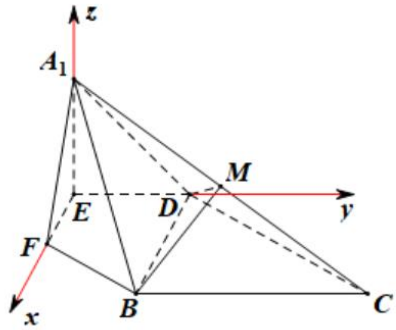
$\because$平面 $A_1EF\perp$平面 $BCDEF$,平面 $A_1EF\cap$平面 $BCDEF=EF$,$A_1E\subset$平面 A_1EF,

$\therefore A_1E\perp$平面 $BCDEF$.

又$\because CD\subset$平面 $BCDEF$,

$\therefore A_1E\perp CD$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得 EF, ED, EA_1 两两垂直,故以 EF, ED, EA_1 分别为 x 轴,y 轴和 z 轴,如图建立空间直角坐标系,



则 $E(0,0,0), F(2,0,0), D(0,2,0)$

$B(4,2,0), C(4,6,0), A(0,0,2), M(2,3,1)$,

$\therefore \overrightarrow{DB}=(4,0,0), \overrightarrow{DM}=(2,1,1)$,

设平面 MBD 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$,

由 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0, \vec{m}\cdot\overrightarrow{DM}=0$,得 $\begin{cases}4x=0\\2x+y+z=0\end{cases}$,

令 $y=1$,得 $\vec{m}=(0,1,-1)$.

易得平面 BCD 的法向量 $\vec{n}=(0,0,1)$.

$\therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由图可得二面角 $M-DB-C$ 为锐二面角,

$\therefore$ 二面角 $M-DB-C$ 的大小为 45°

（Ⅲ）当 N 为线段 A_1D 的中点时,平面 NEF // 平面 MBD

证明如下:

由 N 为线段 A_1D 的中点,得 $N(0,1,1)$.

$\therefore \overrightarrow{EN}=(0,1,1)$,又因为 $\overrightarrow{EF}=(2,0,0)$,

设平面 NEF 的法向量为 $\vec{u}=(a,b,c)$,

由 $\vec{u}\cdot\overrightarrow{EN}=0, \vec{u}\cdot\overrightarrow{EF}=0$,得 $\begin{cases}b+c=0,\\2a=0,\end{cases}$

令 $c=1$,得 $\vec{u}=(0,-1,1)$,

又∵平面 MBD 的法向量为 $\vec{m}=(0,1,-1)$

$\therefore \vec{m}=-\vec{u}$,即 $\vec{m}//\vec{u}$,

$\therefore$ 平面 NEF // 平面 MBD.

18. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=x(\ln x+1)$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率小于 1,求 x_0 的取值范围;

（Ⅱ）设整数 k 使得 $f(x)\geq k(x-\frac{1}{2})$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,求整数 k 的最大值.

【解析】

（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

求导,得 $f'(x)=2+\ln x$,

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率为 $f'(x_0)=2+\ln x_0$,

由题意,得 $2+\ln x_0<1$,

解得 $0<x_0<\frac{1}{e}$,

$\therefore x_0$ 的取值范围是 $(0,\frac{1}{e})$.

（Ⅱ）“$f(x)\geq k(x-\frac{1}{2})$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立”等价于“当 $x>0$ 时, $f(x)-k(x-\frac{1}{2})\geq 0$”,

令 $g(x)=f(x)-k(x-\frac{1}{2})=x\ln x+(1-k)x+\frac{1}{2}k$,

求导,得 $g'(x)=\ln x+2-k$,

由 $g'(x)=0$,得 $x=e^{k-2}$,

随着 x 变化, $g'(x)$ 和 $g(x)$ 的变化情况如下表所示:

x	$(0,e^{k-2})$	e^{k-2}	$(e^{k-2},+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	+
$g(x)$	↘	极小值	↗

$\therefore g(x)$ 在 $(0,e^{k-2})$ 上单调递减,在 $(e^{k-2},+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 的最小值 $g(e^{k-2})=\dfrac{1}{2}k-e^{k-2}\geq 0$,

令 $h(k)=\dfrac{1}{2}k-e^{k-2}$,则 $h(2)=\dfrac{1}{2}\times 2-e^{2-2}=0$

当 $k=2$ 时,

$\because$ $g(x)$ 的最小值 $g(e^{k-2})=g(1)=0$,

$\therefore$ $f(x)\geq k(x-\dfrac{1}{2})$ 对 $x>0$ 恒成立,符合题意;

当 $k>2$ 时,

由 $h'(k)=\dfrac{1}{2}-e^{k-2}<\dfrac{1}{2}-e^{2-2}<0$,得函数 $h(k)=\dfrac{1}{2}k-e^{k-2}$ 在 $(2,+\infty)$ 单调递减,

$\therefore h(k)<h(2)=0$,

此时 $g(x)$ 的最小值 $g(e^{k-2})=h(k)<0$,不符合题意.

$\therefore$ 整数 k 的最大值是 2.

19. （本小题满分 14 分）

已知抛物线$W: y^2 = 2px$的准线方程为$x=-1$,焦点为F,A为抛物线W上异于原点O的一点.

（Ⅰ）若$|AF|=5$,求以线段OA为直径的圆的方程;

（Ⅱ）设过点F且平行于OA的直线l交抛物线W于B,C两点,判断四边形$OABC$能否为等腰梯形?若能,求直线l的方程;若不能,请说明理由.

【解析】

（Ⅰ）由题意,可知$\frac{p}{2}=1$,所以$p=2$.

$\therefore$抛物线方程为$y^2=4x$,焦点为$F(1,0)$.

不妨设$A(x_0,y_0)$,则$|AF|=x_0+1=5$,解得$x_0=4$.

代入抛物线方程,得$y_0=\pm 4$,则点A的坐标为$(4,4)$或$(4,-4)$.

$\therefore |OA|=4\sqrt{2}$.

故以OA为直径的圆的方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=8$或$(x-2)^2+(y+2)^2=8$.

（Ⅱ）结论:四边形$OABC$不可能为等腰梯形

理由如下:

假设四边形$OABC$为等腰梯形,

由题意,可知直线OA的斜率k存在且不为零,

故设直线OA的方程为$y=kx$,直线BC的方程为$y=k(x-1)$,$B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$

联立$\begin{cases} y=kx, \\ y^2=4x, \end{cases}$消去$y$,得$k^2x^2-4x=0$,

解得 $x=0$ 或 $x=\frac{4}{k^2}$,

$\therefore$ 点 $A(\frac{4}{k^2},\frac{4}{k})$, 线段 OA 的中点 M 的坐标为 $(\frac{2}{k^2},\frac{2}{k})$.

联立 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ y^2=4x, \end{cases}$ 消去 y, 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

$\because$ 直线 BC 过焦点 $F(1,0)$, 斜率存在且不为 0, 所以 $\Delta>0$ 恒成立,

$\therefore x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}, x_1x_2=1$.

设线段 BC 的中点为 $N(x_3,y_3)$,

则 $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k^2+2}{k^2}, y_3=k(x_3-1)=\frac{2}{k}$, 故 $N(\frac{k^2+2}{k^2},\frac{2}{k})$.

$\because$ 直线 MN 的斜率 $k_{MN}=\dfrac{\frac{2}{k}-\frac{2}{k}}{\frac{k^2+2}{k^2}-\frac{2}{k^2}}=0$, OA 的斜率为 k,

$\therefore k_{MN}\cdot k\neq -1$, 故直线 MN 与直线 OA 不垂直,

这与等腰梯形上下底中点的连线垂直于上下底矛盾,

$\therefore$ 四边形 $OABC$ 不可能为等腰梯形.

20. （本小题满分 13 分）

对于向量 $X_0=(a_0,b_0,c_0)$，若 a_0,b_0,c_0 三数互不相等，令向量 $X_{i+1}=(a_{i+1},b_{i+1},c_{i+1})$，其中 $a_{i+1}=|a_i-b_i|,b_{i+1}=|b_i-c_i|,c_{i+1}=|c_i-a_i|,i=0,1,2,3,\cdots$.

（Ⅰ）当 $X_0=(5,2,1)$ 时，试写出向量 X_{100}；

（Ⅱ）证明:对于任意 $i\in\mathbf{N}$，向量 X_i 中的三个数 a_i,b_i,c_i 至多有一个为 0;

（Ⅲ）若 $a_0,b_0,c_0\in\mathbf{N}$，证明:存在正整数 t，使得 $X_t=X_{t+3}$.

【解析】

（Ⅰ） $X_{100}=(1,1,0)$.

（Ⅱ）假设 a_i,b_i,c_i 三个数有 2 个为 0,或三个数均为 0,

（1）当 a_i,b_i,c_i 三个数中有 2 个为 0 时,显然 $i\geq 1$;

不妨设 $a_i=b_i=0(i\geq 1),c_i\neq 0$,

则 $a_i=|a_{i-1}-b_{i-1}|=0,b_i=|b_{i-1}-c_{i-1}|=0$, 即 $a_{i-1}=b_{i-1}=c_{i-1}$.

这与 $c_i=|c_{i-1}-a_{i-1}|\neq 0$ 矛盾;

（2）当 a_i,b_i,c_i 三个数均为 0 时,显然 $i\geq 1$;

则 $a_i=|a_{i-1}-b_{i-1}|=0,b_i=|b_{i-1}-c_{i-1}|=0,\ c_i=|c_{i-1}-a_{i-1}|=0$,

所以 $a_{i-1}=b_{i-1}=c_{i-1}=w$（定值）.

由 a_0,b_0,c_0 三数互不相等,

得 $i\geq 2$,且 $a_{i-1}=|a_{i-2}-b_{i-2}|=w,b_{i-1}=|b_{i-2}-c_{i-2}|=w,c_{i-1}=|c_{i-2}-a_{i-2}|=w$,

不妨设 $a_{i-2}\leq b_{i-2}\leq c_{i-2}$,则由 $b_{i-2}-a_{i-2}=w,c_{i-2}-b_{i-2}=w,c_{i-2}-a_{i-2}=w$,

由 $(b_{i-2}-a_{i-2})+(c_{i-2}-b_{i-2})=c_{i-2}-a_{i-2}$, 得 $2w=w$,

所以 $w=0$,即 $a_{i-1}=b_{i-1}=c_{i-1}=0$,

以此类推,可得 $a_{i-2}=b_{i-2}=c_{i-2}=0,a_{i-3}=b_{i-3}=c_{i-3}=0,\cdots,a_1=b_1=c_1=0,\ a_0=b_0=c_0=0$,

这与 a_0,b_0,c_0 三个数互不相等矛盾,

所以对于任意 $i\in\mathbf{N}$, a_i,b_i,c_i 三个数中至多有一个为 0.

（III）设 a_i,b_i,c_i 三个数中最大的为 m_i,记作 $m_i=\max\{a_i,b_i,c_i\}$,

因为 $a_{i+1}=|a_i-b_i|,b_{i+1}=|b_i-c_i|,c_{i+1}=|c_i-a_i|$, 且 $a_i,b_i,c_i\in\mathbf{N}$,

所以 $m_{i+1}\le m_i$,其中 $i=0,1,2,3,\cdots$,

由题意,可知 $m_i\in\mathbf{N}$,其中 $i=0,1,2,3,\cdots$,

所以 $m_1,m_2,m_3\cdots$ 不可能单调递减,即必存在某个 $k\in\mathbf{N}^*$,使得 $m_{k+1}=m_k$.

根据 X_{k+1} 的定义,可得向量 $X_k=(a_k,b_k,c_k)$ 中的三个数 a_k,b_k,c_k 中必有 0.

由（II）知 a_k,b_k,c_k 中有且仅有一个为 0,不妨设 $a_k=0$,

（1）若 $b_k\ne c_k$,由题意,不妨设 $0<b_k<c_k$,

则 $a_{k+1}=|a_k-b_k|=b_k,b_{k+1}=|b_k-c_k|=c_k-b_k,c_{k+1}=|c_k-a_k|=c_k,m_{k+1}=m_k=c_k$,

所以 $a_{k+2}=|a_{k+1}-b_{k+1}|<\max\{b_k,c_k-b_k\}<m_{k+1}$,同理 $b_{k+2}<m_{k+1},c_{k+2}<m_{k+1}$,

所以 $m_{k+2}<m_{k+1}$.

又因为 $m_i\in\mathbf{N}^*$,

所以此种情形不可能一直出现（至多出现 m_{k+1} 次）.

所以一定能找到某个 $j\in\mathbf{N}^*$, 使得 $b_j=c_j$.

（2）若 $b_k=c_k$, 由题意,

得 $X_k=(0,b_k,b_k),X_{k+1}=(b_k,0,b_k),X_{k+2}=(b_k,b_k,0),X_{k+3}=(0,b_k,b_k),\cdots$

所以存在正整数 $t=k$, 使得 $X_t=X_{t+3}$.

综上,存在正整数 t, 使得 $X_t=X_{t+3}$.