2018 年普通高等学校招生全国统一考试

（全国 I 卷）

理科数学

一．选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.设 $z=\dfrac{1-i}{1+i}+2i$，则 $|z|=$

A.0　　B.$\dfrac{1}{2}$　　C.1　　D.$\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

$z=\dfrac{1-i}{1+i}+2i=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}+2i=i$，设 $z=a+bi$，则 $a=0,b=1$，

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=1$，故选 C。

2.已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-x-2>0\}$，则 $C_RA=$

A.$\{x\,|-1<x<2\}$

B.$\{x\,|-1\le x\le 2\}$

C.$\{x\,|\,x<-1\}\cup\{x\,|\,x>2\}$

D.$\{x\,|\,x\le -1\}\cup\{x\,|\,x\ge 2\}$

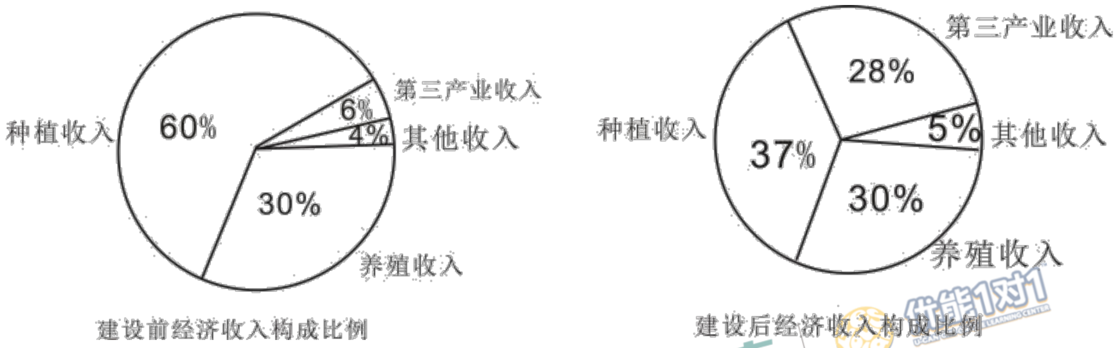
【答案】B

【解析】

$x^2-x-2>0$，即 $(x-2)(x+1)>0$，得到 $x>2$ 或 $x<-1$，

$\therefore A=\{x\,|\,x<-1\}\cup\{x\,|\,x>2\}$，$\therefore C_RA=\{x\,|-1\le x\le 2\}$，故选 B。

3.某地区经过一年的新农村建设，农村的经济收入增加了一倍，实现翻番，为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况，统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例，得到如下饼图：



则下面结论中不正确的是

A.新农村建设后，种植收入减少

B.新农村建设后，其他收入增加了一倍以上

C.新农村建设后，养殖收入增加了一倍

D.新农村建设后，养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

【答案】A

【解析】

A 项中，假设原来的农村经济收入是 1，则实现翻番后，农村经济收入变成 2，则种植收入由$1\times0.6=0.6$变为$2\times0.37=0.74$，种植收入是增长的，故 A 项错。

B 项中，原来的其他收入是$1\times0.4=0.4$，新农村建设后，其他收入是$2\times0.5=1.0$，则其他收入增加了一倍以上，故 B 项正确。

C 项中，原来的养殖收入是$1\times0.3=0.3$，新农村建设后，其他收入是$2\times0.3=0.6$，则养殖收入增加了一倍，故 C 项正确。

D 项中，新农村建设后，其中的养殖收入与第三产业收入的总和达到了$28\%+30\%=58\%$，超过了经济收入的一半，故 D 项正确。

4.记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和.若$3S_3=S_2+S_4, a_1=2,$则$a_5=$

A.-12　　B.-10　　C.10　　D.12

【答案】B

【解析】根据题意，$3S_3=S_2+S_4$所以$3(3a_1+3d)=(2a_1+d)+(4a_1+6d)$.又因为$a_1=2,$解得$d=-3$. 所以$a_5=2+(-3)\times4=-10.$

5.设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$,若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为

A. $y=-2x$　　B. $y=-x$　　C. $y=2x$　　D. $y=x$

【答案】D

【解析】根据题意，由奇函数性质知，$f(-x)=-f(x)$,解得 $a=1$.又 $f'(x)=3x^2+1$,得 $k=f'(0)=1$.故 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=x$.

6. 在 ΔABC 中，AD 为 BC 边上的中线，E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{EB}=$

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

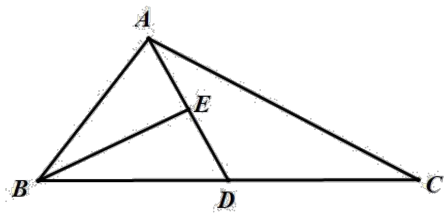
【答案】A

【解析】

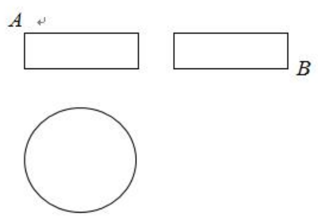
$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$



7. 某圆柱的高为 2，底面周长为 16，其三视图如右图，圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A，圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B，则在此圆柱侧面上，从 M 到 N 的路

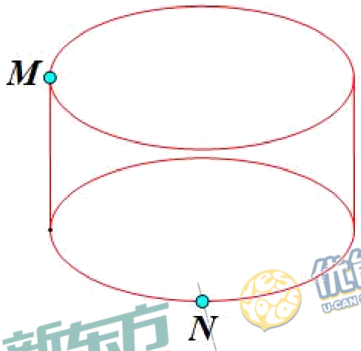


径中，最短路径的长度为

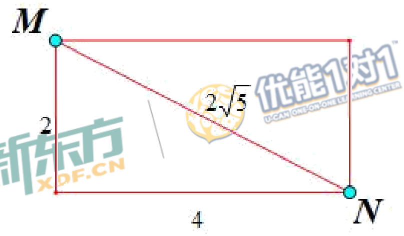
A. $2\sqrt{17}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 3　　D. 2

【答案】B

【解析】



圆柱体还原图



圆柱体侧面展开图

8.设抛物线$C:y^2=4x$的焦点为 F，过点$(-2,0)$且斜率为$\frac{2}{3}$的直线与 C 交于 M，N 两点，则$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=$

A.5　　B.6　　C.7　　D.8

【答案】D

【解析】

由题可得：$F(1,0)$，$MN:y=\frac{2}{3}(x+2)=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$

将直线 MN 与抛物线 C 联立$\begin{cases}y^2=4x\\ y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\end{cases}$

整理可得$x^2-5x+4=0$　　解得$x_1=1,x_2=4$

$\therefore M(1,2),N(4,4)$

$\therefore \overrightarrow{FM}=(0,2),\overrightarrow{FN}=(3,4)$

$\therefore \overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0\times3+2\times4=8$

9.已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{2}, & x\le 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$,若 $g(x)$ 存在 2 个零点,则 a 取值范围是

A.$[-1,0)$　　B.$[0,+\infty)$　　C.$[-1,+\infty)$　　D.$[1,+\infty)$

【答案】C

【解析】

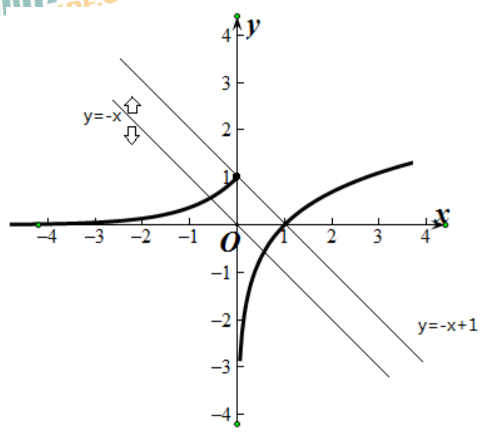
由于 $g(x)$ 有两个零点，则

$g(x)=f(x)+x+a=0$ 有两个解,

即 $f(x)=-x-a$ 有两个解,即函数 $f(x)$ 和

函数 $y=-x-a$ 有两个交点.

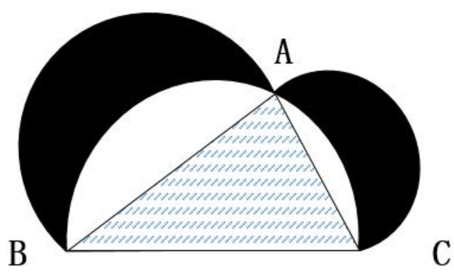
如图所示，$y=-x-a$ 由 $y=-x$ 上下平移



得到,要使得函数 $f(x)$ 和函数 $y=-x-a$ 有两个交点,所以要求 $y=-x-a$ 在 $y=-x+1$ 的下方.所以 $-a\le1$,即 $a\ge-1$.

C 正确.

10.下图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC，直角边 AB, AC．ΔABC 的三边所围成的区域记为 I，黑色部分记为 II，其余部分记为 III．在



整个图形中随机取一点，此点取自 I，II，III 的概率分别记为 p_1，p_2，p_3，则

A. $p_1 = p_2$　　B. $p_1 = p_3$
C. $p_2 = p_3$　　D. $p_1 = p_2 + p_3$

【答案】A
【解析】
设 $AB = c$， $AC = b$， $BC = a$， 则 $a^2 = b^2 + c^2$.

$S_I = \frac{1}{2}bc$，

$S_{II} = \pi(\frac{c}{2})^2 + \pi(\frac{b}{2})^2 + \frac{1}{2}bc - \pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi}{4}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc$，

$S_{III} = \pi(\frac{a}{2})^2 - \frac{1}{2}bc$，

所以 $S_I = S_{II}$，所以 $p_1 = p_2$，A 选项正确.

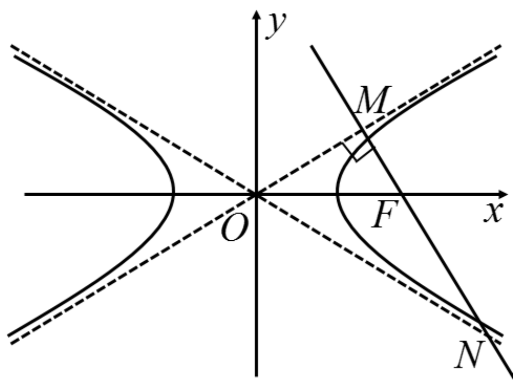
11.已知双曲线 $C:\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$，$O$ 为坐标原点，F 为 C 的右焦点，过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M,N. 若 ΔOMN 为直角三角形，则 $|MN| =$

A. $\frac{3}{2}$　　B. 3　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

【答案】B

【解析】双曲线的渐近线为 $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$，

又由 ΔOMN 为直角三角形，易知过 F 的直线 l 与其中一条双曲线垂直，不妨设直线 l 与 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 垂直，交点为 M，



如图所示。则直线 l 斜率 $k = -\sqrt{3}$，而 l

过点 $F(2,0)$，得直线 $l: y = -\sqrt{3}(x-2)$。从而由 $\begin{cases} y = -\sqrt{3}(x-2) \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \end{cases}$ 得点

$M(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$；由 $\begin{cases} y=-\sqrt{3}(x-2) \\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x \end{cases}$ 得点 $N(3,-\sqrt{3})$；

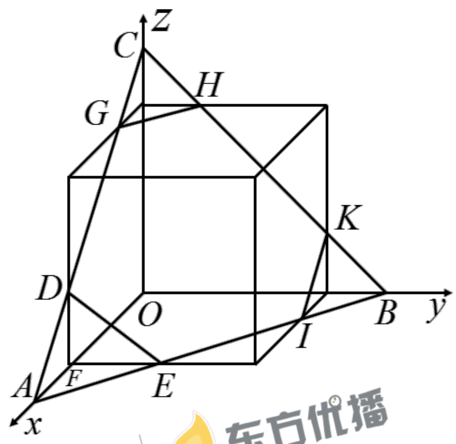
$|MN|=\sqrt{(\frac{3}{2}-3)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3})^2}=3$。故选 B.

12.已知正方体的棱长为 1，每条棱所在的直线与平面 α 所成的点都相等，则 α 截此正方体所得得截面面积最大值为

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【解析】



$\because$ 正方体的六条棱可分为三组分别与

$\vec{a}(1,0,0),\vec{b}(0,1,0),\vec{c}(0,0,1)$ 相互平行

$\therefore$ 设截面的法向量 $\vec{n}(x,y,z)$

当每条棱所在的直线与平面 α 所称的点都

相等时满足: $\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}=\frac{\vec{c}\bullet\vec{n}}{|\vec{c}||\vec{n}|}$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

即：平面 α 的法向量可为 $\vec{n}(1,1,1)$

故得平面 α 如图所示，交 x,y,z 轴于 A,B,C 三点，距 O 点距离相等

设 $|OA|=|OB|=|OC|=t$

$\because \Delta ABC$ 中满足：$AB=AC=BC$

$\therefore \angle CAB=\angle CBA=\angle ACB=60°$

又 $\because AE=AD$

$\therefore \Delta ADE$ 为等边三角形

又 $\because \angle CAO=45°$

$\therefore AD=\sqrt{2}(OA-OF)=\sqrt{2}(t-1)$

即：$S_{\Delta ADE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-1)^2$

同理得：$S_{\Delta CGH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-1)^2, S_{\Delta BKI}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-1)^2$

又$\because S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2$

$\therefore$截得的面积为$S=S_{\Delta ABC}-3S_{\Delta ADE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(t-1)^2$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(-2t^2+6t-3)$

即：$t=\dfrac{3}{2}$时：$S_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.若x,y满足约束条件$\begin{cases}x-2y-2\le 0\\ x-y+1\ge 0\\ y\le 0\end{cases}$，则$z=3x+2y$的最大值为______.

【答案】6

【解析】

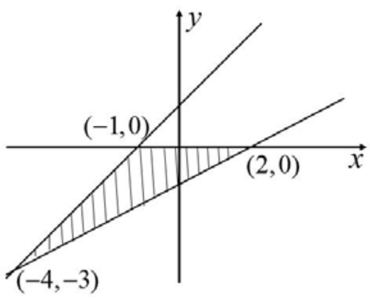
（法一）画出三条直线，如图

因为$z=3x+2y$

所以$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{z}{2}$

可知$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{z}{2}$为斜率小于 0 的直线在$(2,0)$处取得最大值

所以$z=3\times 2+2\times 0=6$



（法二）代入区域三顶点，比较大小

三顶点为$(-4,-3)$，$(-1,0)$，$(2,0)$

$z_1=3\times(-4)+2\times(-3)=-18$

$z_2=3\times(-1)+2\times0=-3$

$z_3=3\times2+2\times0=6$

取最大值为 6

14.记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_n=2a_n+1$，则S_6=________.

【答案】-63

【解析】$S_n=2a_n+1$　①

$S_{n-1}=2a_{n-1}+1$　②

①−②，得

$S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$

$a_n=2a_n-2a_{n-1}$　化简得　$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$

$\{a_n\}$为等比数列，首项为a_2

$a_n=a_2\cdot q^{n-2}=-2\cdot2^{n-2}=-2^{n-1}$

当$n=1$时　$a_1=-1$

检验：$S_1=2a_1+1$

$a_1=2a_1+1$

得　$a_1=-1$

成立

所以$a_n=-2^{n-1}$

$$S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=1-2^n$$

所以 $S_6=1-2^6=1-64=-63$

15.从 2 位女生，4 位男生中选 3 人参加科技比赛，且至少有 1 位女生入选，则不同的选法共有________种.（用数字填写答案）

【答案】16

【解析】从 2 位女生，4 位男生中选 3 人共 $C_6^{\ 3}$ 种选法，至少有 1 位女生入选，选法共 $C_6^{\ 3}-C_4^{\ 3}=16$ 种

16.已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$，则 $f(x)$ 的最小值是__________.

【答案】$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】由题意得 $T=2\pi$ 是 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ 的一个周期，故只需考虑 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ 在 $[0,2\pi)$ 上的值域，先来求该函数在 $[0,2\pi)$ 上的极值点，

求导可得 $f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=2\cos x+2(2\cos^2 x-1)$

$=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$

令 $f'(x)=0$ 可解得 $\cos x=\frac{1}{2}$ 或 $\cos x=-1$，

可得此时 $x=\frac{\pi}{3},\pi$ 或 $\frac{5\pi}{3}$；所以 $y=2\sin x+\sin 2x$ 的最小值只能在点 $x=\frac{\pi}{3},\pi$ 或 $\frac{5\pi}{3}$ 和边界点 $x=0$ 中取得，

计算可得 $f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2},f(\pi)=0,f(\frac{5\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2},f(0)=0$

所以函数的最小值为 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17.（12 分）

在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=90^\circ, \angle A=45^\circ$，$AB=2$，$BD=5$.

（1）求 $\cos\angle ADB$；

（2）若 $DC=2\sqrt{2}$，求 BC.

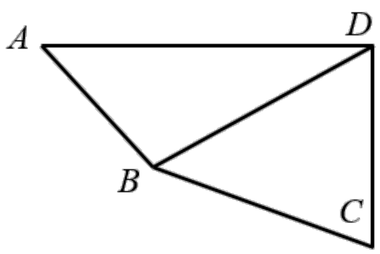
【答案】

（1）$\dfrac{\sqrt{23}}{5}$

（2）5

【解析】

（1）在 ΔABD 中，$AB=2$，$BD=5$，$\angle A=45^\circ$



根据正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 得

$\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{BD}{\sin\angle A}$

代入 $\dfrac{2}{\sin\angle ADB}=\dfrac{5}{\sin 45^\circ}$

得：$\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

由于 $AB<BD$，所以 $\angle ADB<45^\circ$

所以 $\cos\angle ADB=\sqrt{1-\sin^2\angle ADB}=\dfrac{\sqrt{23}}{5}$

（2）在 ΔBCD 中，$BD=5, CD=2\sqrt{2}$

$\cos\angle BDC=\cos(\dfrac{\pi}{2}-\angle ADB)=\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

根据余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得

$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle BDC$

$=25+8-2\times5\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

$=25$

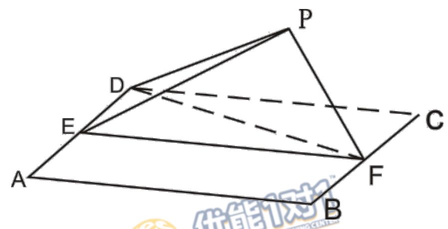
所以 $BC=5$

18.（12 分）

如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，E,F 分别为 AD,BC 的中点，以 DF 为折痕把 ΔDFC 折起，使点 C 到达点 P 的位置，且 $PF\perp BF$.

（1）证明：平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$；

（2）求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值。



【答案】

（1）见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

【解析】

（1）证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$\therefore AB\perp BC$

又 $\because E,F$ 分别为 AD,BC 的中点

$\therefore EF\,//\,AB$

又 $\because PF\perp BF$

$PF\cap BC=F$

$\therefore BF\perp$ 平面 PEF

$BF\subset$ 平面 $ABFD$

$\therefore$ 平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$

（2）过点 P 作 $PO\perp EF$ 于点 O .

由（1）知，平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$

$PO\perp$ 平面 $ABFD$，

连接 DO .

$\therefore\angle PDO$ 即为 PD 与平面 $ABFD$ 所成的角.

$PF\perp PD, PF\perp BF$.

又 $\because BF\,//\,AD\ \therefore PF\perp AD$

$\therefore PF\perp$ 平面 DPE

$\therefore PF\perp EP$

设正方形的边长为 2.

$\therefore PF=1, ED=1, PD=EF=2. \therefore PE=\sqrt{3}$

又 $\because PF\times PE=EF\times PO\ \therefore PO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin\angle PDO=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

即 DP 与平面 $ABFD$ 所所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

19.（12 分）

设椭圆$C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F，过F点的直线l与C交于A，B两点，点M的坐标为$(2,0)$.

（1）当l与x轴垂直时，求直线AM的方程;

（2）设O为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$.

【答案】

（1）$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$

（2）见解析

【解析】

（1）由$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$得$a=\sqrt{2}$，$b=c=1$，$F(1,0)$，当l与x轴垂直时

l：$x=1$.代入C：$\dfrac{1}{2}+y^2=1$. $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.所以$A(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$或$(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

$l:y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$或$l:y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$

（2）由题意易知当l斜率为0时，$\angle OMA=\angle OMB=0^o$

当l斜率不为0时，设$l:x=ty+1$。$\begin{cases}x=ty+1\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$所以

$(t^2+2)y^2+2ty-1=0$

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

$y_1\cdot y_2=-\dfrac{1}{t^2+2}\quad y_1+y_2=\dfrac{-2t}{t^2+2}$

由A、B必在x轴上下两侧，OM在x轴上

$\angle OMA=\angle OMB$，即 $k_{MA}=k_{MB}$，即证

$k_{MA}+k_{MB}=0$,所以

$$\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_1}{ty_1-1}+\frac{y_2}{ty_2-1}=\frac{2ty_1y_2-(y_1+y_2)}{(ty_1-1)(ty_2-1)}=\frac{(-2t)-(-2t)}{(t^2+2)(ty_1-1)(ty_2-1)}=0$$

证明完毕

20.（12 分）

某工厂的某种产品成箱包装，每箱 200 件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格品，则更换为合格品.检验时，先从这箱产品中任取 20 件作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验.设每件产品为不合格品的概率都为 $p(0<p<1)$，且各件产品是否为不合格品相互独立.

（1）记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$的最大值点 p_0.

（2）现对一箱产品检验了 20 件，结果恰有 2 件不合格品，以（1）中确定的 p_0 作为 p 的值，已知每件产品的检验费用为 2 元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用.

(i)若不对该箱余下的产品作检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X ,求 EX；

(ii)以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验?

【答案】

（1）$P_0=\dfrac{1}{10}$

（2）(i)490；(ii)是

【解析】

（1）设 20 件产品中不合格品的件数为 X

则 $X\sim B(20,0)$

则 $f(p)=C_{20}^{2}p^{2}(1-p)^{18}=190\cdot p^{2}\cdot(1-p)^{18}$

$f'(p)=380p(1-p)^{18}-190p^{2}\cdot 18(1-p)^{17}(0<p<1)$

$=380(1-p)^{17}\cdot p(1-10p)$

令 $f'(p)=0$ 得　　$p=1或0或\dfrac{1}{10}$

则 $p,f(p),f'(p)$ 变化详见下表.

p	$(0,\dfrac{1}{10})$	$\dfrac{1}{10}$	$(\dfrac{1}{10},0)$
$f'(p)$	+	0	-
$f(p)$	↗	极大值	↘

由表可知， $f(p)$的极大值点即为最大值点.

$\therefore p_0=\dfrac{1}{10}$

（2）（i）20 件产品检验费用为$20\times 2=40$元

设不合格个数位Y,则$Y\sim B(180,\dfrac{1}{10})$

则$E(Y)=180\times\dfrac{1}{10}=18$

赔偿费用的期望为$E(Y)=25\times 18=450$

故这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和为$EX=40+450=490$元.

（ii）200 件产品检验费用为$200\times 2=400$元

因为$490>400$

故需要对这箱余下的所有产品作检验.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，证明：$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

【答案】

（1）当 $a\le 2$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；

当 $a>2$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$ 和 $(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 上单调递减，

在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 上单调递增

（2）见解析

【解析】

(1) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-1+\dfrac{a}{x}=\dfrac{-x^2+ax-1}{x^2}$ $x\in(0,+\infty)$

当 $a\le 2$ 时，$f^{'}\left(x\right)\le 0$，所以 $f\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 为减函数；

当 $a>2$ 时，令 $f^{'}\left(x\right)=0$，$x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},x_2=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$

x	$(0,x_2)$	x_2	(x_2,x_1)	x_1	$(x_1,+\infty)$
$f^{'}\left(x\right)$	-	0	+	0	-
$f\left(x\right)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

综上所述，当 $a\le 2$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；

当 $a>2$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$ 和 $(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 单调递减，

在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 为单调递增.

（2）证明：

因为

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{1}{x_1}-x_1+a\ln x_1-\frac{1}{x_2}+x_2-a\ln x_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+\frac{a\ln x_1-a\ln x_2}{x_1x_2}$$

由（1）知，$x_1x_2\ =1$

所以$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_3}=-2+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$

由于$y=\ln x$在$(1,0)$处的切线斜率为 1，

$x\in(0,1)$时，$y^{'}>1$； $x\in(1,+\infty)$时，$y^{'}<1$；

又因为$x_1x_2=1$，所以$0<\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<1$

所以$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系xOy中，曲线C_1的方程为$y=k|x|+2$.以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_2的极坐标方程为$\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$.

（1）求C_2的直角坐标方程；

（2）若C_1与C_2有且仅有三个公共点，求C_1的方程.

【答案】

（1）$(x+1)^2+y^2=4$

（2）$y=-\frac{4}{3}|x|+2$

【解析】

（1）由题意可知：

曲线C_2的直角坐标方程为$(x+1)^2+y^2=4$.

（2）曲线C_2是以$(-1,0)$为圆心，半径$r=2$的圆

曲线C_1过定点$(0,2)$

若C_1与C_2有且仅有三个公共点，即$x>0$时，C_1与C_2相切

当$x>0$时，C_1方程为$kx-y+2=0$

圆心到C_1距离$d=\frac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$

解得$k=-\frac{4}{3}$或$k=0$

当$k=0$时，不满足有三个交点，所以$k=-\frac{4}{3}$

C_1方程为$y=-\frac{4}{3}|x|+2$.

23．[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知$f(x)=|x+1|-|ax-1|$.

（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)>1$的解集；

（2）若$x\in(0,1)$时不等式$f(x)>x$成立，求a的取值范围.

【答案】

（1）$(\frac{1}{2},+\infty)$

（2）$a\in(0,2]$

【解析】

（1）当$a=1$时，$|x+1|-|x-1|>1$

(i)当$x\le-1$时，

$-x-1-(1-x)-1>0$

解得：$-3>0$，不成立

$\therefore$此时无解

(ii)当$-1<x<1$时

$x+1-(1-x)-1>0$

解得：$2x>1$

$\therefore x>\frac{1}{2}$

又$\because -1<x<1$

$\therefore \frac{1}{2}<x<1$

(iii)当$x\geq 1$时

$x+1-(x-1)-1>0$

解得：$1>0$，恒成立

$\therefore x\geq 1$

综上所述，原不等式的解集为$(\frac{1}{2},+\infty)$

（2）当$x\in(0,1)$时

$f(x)=x+1-|ax-1|>x$

$\therefore 1-|ax-1|>0$

$\therefore |ax-1|<1$

$\therefore -1<ax-1<1$

$0<ax<2$

$\therefore a>0$且$a<\frac{2}{x}$

$g(x)=\frac{2}{x}$在$(0,1)$单调递减

$\therefore g(x)<\frac{2}{1}=2$

$\therefore a\in(0,2]$