

2018年普通高等学校招生全国统一考试

(全国 I 卷)

文科数学

一. 选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{0, 2\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$

A. $\{0, 2\}$

B. $\{1, 2\}$

C. $\{0\}$

D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

【答案】A

【解析】 $A = \{0, 2\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 所以 $A \cap B = \{0, 2\}$, 所以选 A

2. 设 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i$, 则 $|z| =$

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

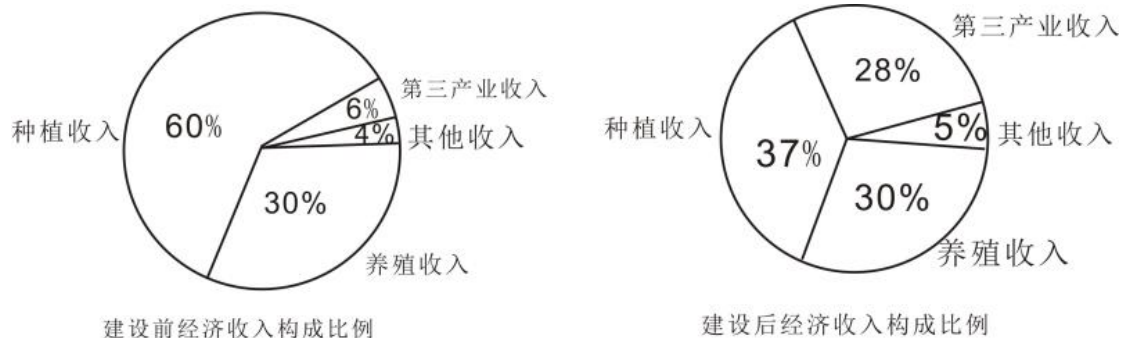
D. $\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} + 2i = i$, 设 $z = a + bi$, 则 $a = 0, b = 1$,

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, 故选 C

3. 某地区经过一年的新农村建设, 农村的经济收入增加了一倍, 实现翻番, 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况, 统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例, 得到如下饼图:



则下面结论中不正确的是

- A. 新农村建设后，种植收入减少
- B. 新农村建设后，其他收入增加了一倍以上
- C. 新农村建设后，养殖收入增加了一倍
- D. 新农村建设后，养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

【答案】A

【解析】

A项中，假设原来的农村经济收入是1，则实现翻番后，农村经济收入变成2，则种植收入由 $1 \times 0.6 = 0.6$ 变为 $2 \times 0.37 = 0.74$ ，种植收入是增长的，故A项错。

B项中，原来的其他收入是 $1 \times 0.4 = 0.4$ ，新农村建设后，其他收入是 $2 \times 0.5 = 1.0$ ，则其他收入增加了一倍以上，故B项正确。

C项中，原来的养殖收入是 $1 \times 0.3 = 0.3$ ，新农村建设后，其他收入是 $2 \times 0.3 = 0.6$ ，则养殖收入增加了一倍，故C项正确。

D项中，新农村建设后，其中的养殖收入与第三产业收入的总和达到了 $28\% + 30\% = 58\%$ ，超过了经济收入的一半，故D项正确。

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的一个焦点为 $(2, 0)$ ，则 C 的离心率为

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【答案】C

解析：由题意知， $b^2 = 4, c^2 = 4, a^2 = b^2 + c^2 = 8, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1, O_2 ，过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为8的正方形，则该圆柱的表面积为

A. $12\sqrt{2}\pi$

B. 12π

C. $8\sqrt{2}\pi$

D. 10π

【答案】B

解析：由题意知，正方形边长为 $2\sqrt{2}$ ，故圆柱高 $h = 2\sqrt{2}$ ，底面半径

$$r = \sqrt{2}, \quad S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 4\pi + 8\pi = 12\pi$$

6. 设函数 $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax$, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为

A. $y = -2x$

B. $y = -x$

C. $y = 2x$

D. $y = x$

【答案】D

【解析】根据题意, 由奇函数性质知, $f(-x) = -f(x)$, 解得 $a=1$. 又 $f'(x) = 3x^2 + 1$, 得 $k = f'(0) = 1$. 故 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y = x$.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB} =$

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

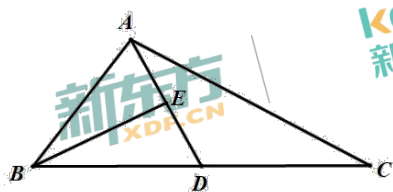
B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

【答案】A

【解析】



$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

8. 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 x - \sin^2 x + 2$, 则

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π , 最大值为 3
- B. $f(x)$ 的最小正周期为 π , 最大值为 4
- C. $f(x)$ 的最小正周期为 2π , 最大值为 3
- D. $f(x)$ 的最小正周期为 2π , 最大值为 4

【答案】B

【解析】由二倍角公式可得 $f(x) = \cos 2x + 1 + \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2$, 化简可得

$f(x) = \frac{3}{2}\cos 2x + \frac{5}{2}$, 又由 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ 得 $T = \pi$, 由三角函数最值可得

$$f(x)_{\max} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$

9. 某圆柱的高为 2, 底面周长为 16, 其三视图如右图. 圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A , 圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B , 则在此圆柱侧面上, 从 M 到 N 的路径中, 最短路径的长度为

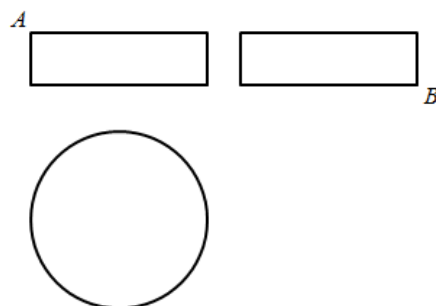
- A. $2\sqrt{17}$
- B. $2\sqrt{5}$
- C. 3
- D. 2

【答案】B

【解析】由圆柱的三视图, 可还原圆柱的立体图形如图, 则点 A 点 B 的位置如图所示, 两点间线段最短, ABC 构成直角三角形, AC 长为圆柱的高, CB 的长为底面周长的 $\frac{1}{4}$, 由勾股定理得 $AC =$

$$\sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

10. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 2$, AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成



的角为 30° ，则该长方体的体积为

A.8

B. $6\sqrt{2}$ C. $8\sqrt{2}$ D. $8\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB \perp$ 平面 BB_1C_1C ，如图，连接 AC_1, BC_1 ， $\therefore AB \perp BC_1$ ， $\angle AC_1B$ 为 AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成角，

$$\therefore \angle AC_1B = 30^\circ$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle ABC_1 \text{ 中, } AC_1 = \frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4,$$

$$BC_1 = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3},$$

又在长方形 BB_1C_1C 中， $C_1C \perp BC$ ，

$$\text{由勾股定理得 } CC_1 = \sqrt{BC_1^2 - BC^2} = \sqrt{12 - 4} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = AB \cdot BC \cdot CC_1 = 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

所以本题选C

11. 已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上有

两点 $A(1, a)$ ， $B(2, b)$ ，且 $\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$ ，则 $|a - b| =$

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. 1

【答案】B

【解析】设 A, B 所在的直线为 $y = kx$ ，则 $k = \tan \alpha$ ，

$$\therefore a = \tan \alpha, b = 2 \tan \alpha \therefore |a - b| = |\tan \alpha|, \text{ 而 } \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2}{3}, \text{ 解出}$$

$$|\tan \alpha| = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, 则满足 $f(x+1) < f(2x)$ 的 x 的取值范围是

- A. $(-\infty, -1]$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-1, 0)$ D. $(-\infty, 0)$

【答案】D

【解析】分段函数抽象不等式问题根据分段点分类讨论 $x+1, 2x$

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 0$$

$$\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ 2x \leq 0 \\ 2x < x+1 \end{cases} \Rightarrow x \leq -1$$

综上, $a \in (-\infty, 0)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \log_2(x^2 + a)$, 若 $f(3) = 1$, 则 $a =$ _____.

【答案】-7

【解析】 $f(x) = \log_2(x^2 + a)$

$$f(3) = \log_2(9 + a) = 1$$

$$\text{所以 } 9 + a = 2$$

$$a = -7$$

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 2y - 2 \leq 0 \\ x - y + 1 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值为 _____.

【答案】6

【解析】

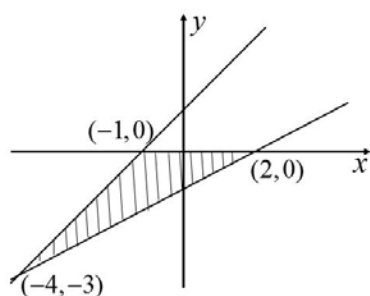
(法一) 画出三条直线, 如图

$$\text{因为 } z = 3x + 2y$$

$$\text{所以 } y = -\frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$$

可知 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$ 为斜率小于 0 的直线在 $(2,0)$ 处取得最大值

所以 $z = 3 \times 2 + 2 \times 0 = 6$



(法二)代入区域三顶点，比较大小

三顶点为 $(-4, -3)$ ， $(-1, 0)$ ， $(2, 0)$

$$z_1 = 3 \times (-4) + 2 \times (-3) = -18$$

$$z_2 = 3 \times (-1) + 2 \times 0 = -3$$

$$z_3 = 3 \times 2 + 2 \times 0 = 6$$

取最大值为 6

15. 直线 $y = x + 1$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$ 交于 A, B 两点，则 $|AB| =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】圆 $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$ 化为标准形式为 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ ，圆心到

直线的距离 $d = \frac{|1+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，则 $\frac{|AB|}{2} = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$ ，

所以 $|AB| = 2\sqrt{2}$

16. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边为 a, b, c ，已知

$b \sin C + c \sin B = 4a \sin B \sin C$ ， $b^2 + c^2 - a^2 = 8$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为

_____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】由正弦定理推论得，

$$\sin B \sin C + \sin C \sin B = 4 \sin A \sin B \sin C,$$

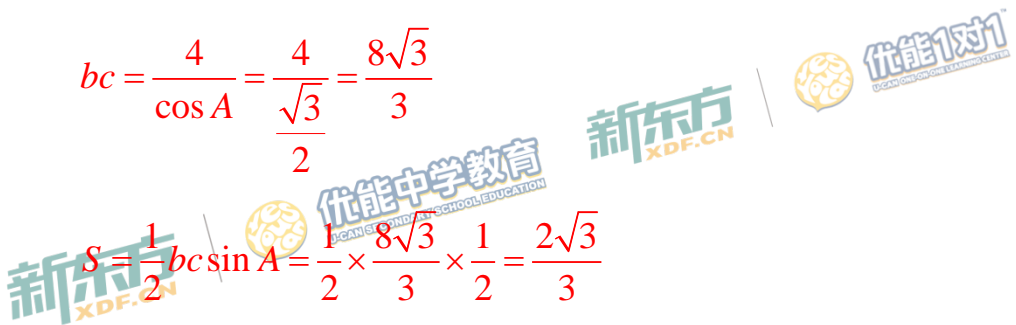
因为 B 、 C 为三角形内角，故 $\sin B \neq 0$ ， $\sin C \neq 0$

则由 $2 \sin B \sin C = 4 \sin A \sin B \sin C$ 得 $\sin A = \frac{1}{2}$ ，

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A = 8, \text{ 得}$$

$$bc = \frac{4}{\cos A} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。
第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：60 分。

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $na_{n+1} = 2(n+1)a_n$, 设 $b_n = \frac{a_n}{n}$.

(1) 求 b_1, b_2, b_3 ;

(2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列，并说明理由；

(3) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】(1) $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 4$ (2) 是 (3) $a_n = n \cdot 2^{n-1}$

【解析】

解：(1) $b_1 = \frac{a_1}{1} = 1$

$b_2 = \frac{a_2}{2}, a_2 = 2(1+1)a_1 = 4, \therefore b_2 = 2$

$b_3 = \frac{a_3}{3}, 2a_3 = 2(2+1)a_2, \therefore a_3 = 12, \therefore b_3 = 4$

(2) $b_n = \frac{a_n}{n}, b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n+1}$

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{n}{n+1}$

$\because na_{n+1} = 2(n+1)a_n$

$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$

\therefore 数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列；

(3) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2^{n-1}$

又 $\because b_n = \frac{a_n}{n}$

$\therefore a_n = n \cdot b_n \quad \therefore a_n = n \cdot 2^{n-1}$

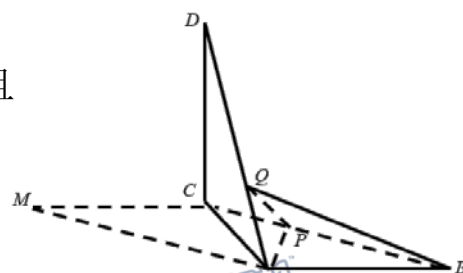
18.(12分)

如图,在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=AC=3$, $\angle ACM=90^\circ$.以 AC 为折痕将 $\triangle ACM$ 折起,使点 M 到达点 D 的位置,且 $AB \perp DA$.

(1)证明:平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ;

(2) Q 为线段 AD 上一点, P 为线段 BC 上一点,且

$$BP = DQ = \frac{2}{3}DA, \text{ 求三棱锥 } Q-ABP \text{ 的体积}$$



【答案】(1)见解析

(2) 1

(1)证明: \because 四边形 $ABCM$ 是平行四边形, $\angle ACM=90^\circ$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACM = 90^\circ$$

即 $AB \perp AC$

又 $\because AB \perp DA$

$$AC \cap DA = A$$

$AC \subset$ 平面 ACD

$DA \subset$ 平面 ACD

$\therefore AB \perp$ 平面 ACD

又 $\because AB \subset$ 平面 ABC

$AB \not\subset$ 平面 ACD

\therefore 平面 $ABC \perp$ 平面 ACD

(2)过点 Q 作 $QH \perp AC$ 于 H

\because 平面 $ABC \perp$ 平面 ACD

平面 $ABC \cap$ 平面 $ACD = AC$

$DC \perp AC$

$\therefore DC \perp$ 平面 ABC

又 $\because QH \perp AC \therefore QH \parallel DC$

$\therefore QH$ 为三棱锥 $Q-ABP$ 的高, $QH = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3} \times 3 = 1$

$$S_{\triangle ABP} = \frac{2}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 3$$

$$\therefore V_{Q-ABP} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABP} \times QH = \frac{1}{3} \times 3 \times 1 = 1$$

19.(12分)

某家庭记录了未使用节水龙头 50 天的日用水量数据(单位: m^3)和使用了节水龙头 50 天的日用水量数据, 得到频数分布表如下:

未使用节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

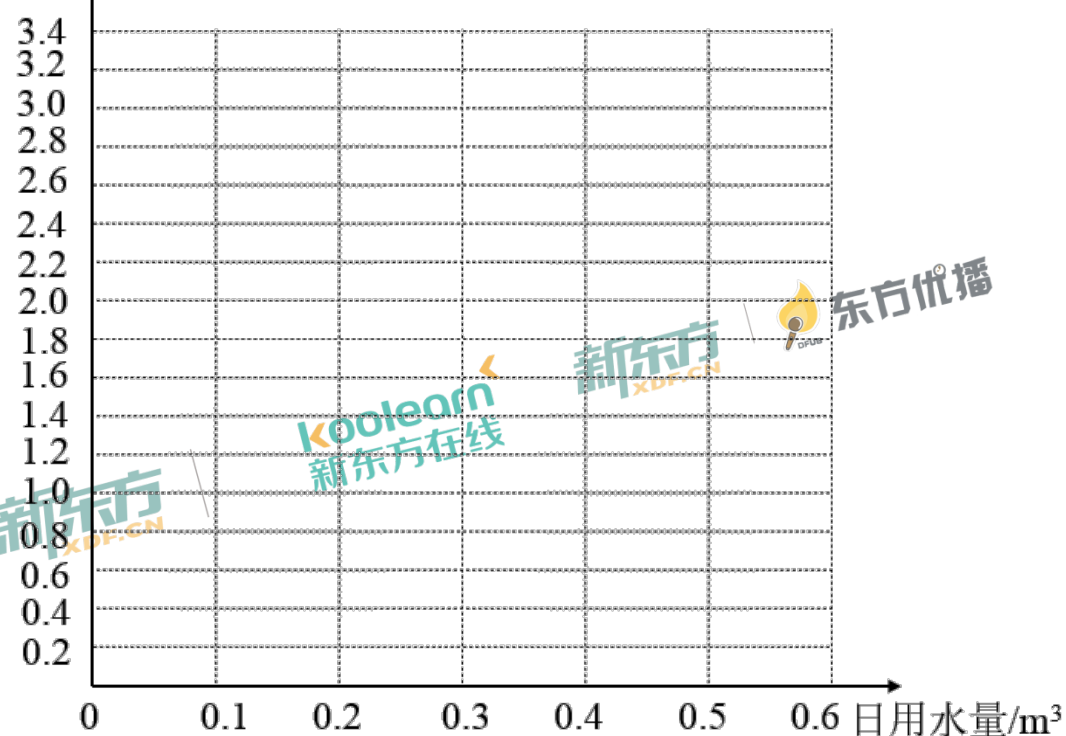
日用水量	[0,0.1)	[0.1,0.2)	[0.2,0.3)	[0.3,0.4)	[0.4,0.5)	[0.5,0.6)	[0.6,0.7)
频数	1	3	2	4	9	26	5

使用了节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

日用水量	[0,0.1)	[0.1,0.2)	[0.2,0.3)	[0.3,0.4)	[0.4,0.5)	[0.5,0.6)
频数	1	5	13	10	16	5

(1)在答题卡上作出使用了节水龙头 50 天的日用水量数据的频率分布直方图;

频率/组距



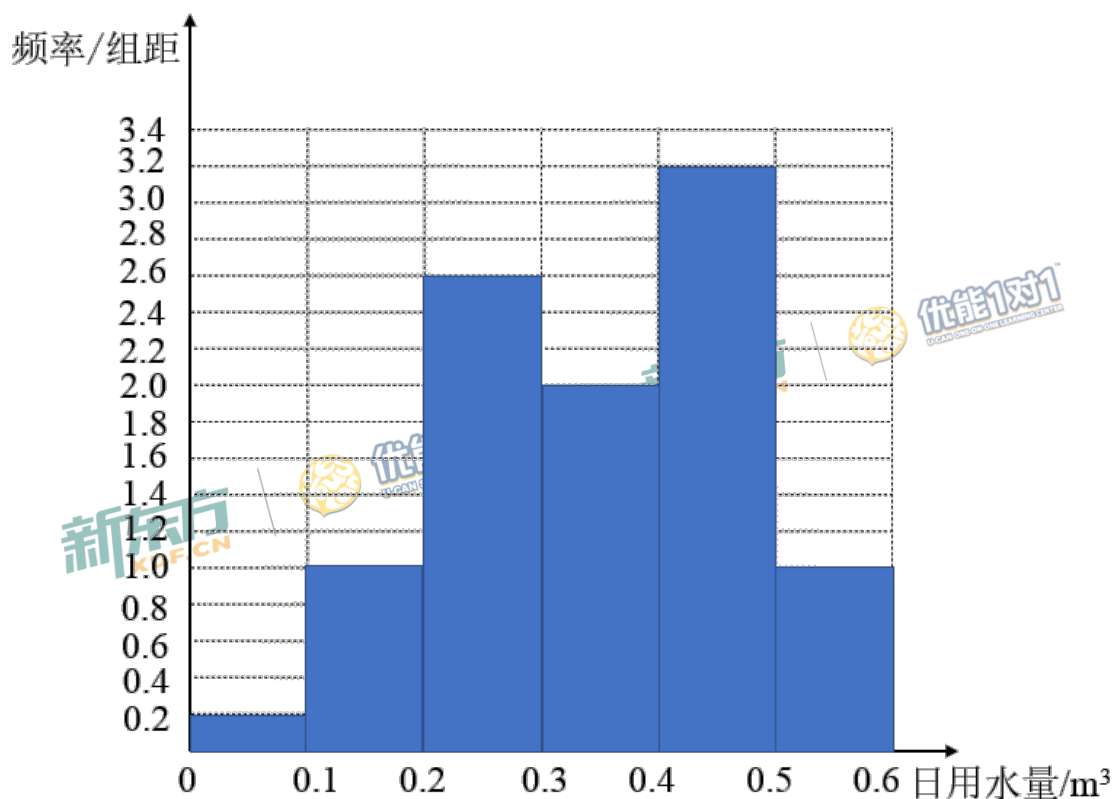
(2)估计该家庭使用节水龙头后, 日用水量小于 $0.35m^3$ 的概率;

(3)估计该家庭使用节水龙头后, 一年能节省多少水? (一年按 365 天计算, 同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表.)

【答案】(1)见解析 (2)0.48 (3) $47.45m^3$

【解析】

(1)



(2)设“日用水量小于 $0.35m^3$ ”为A事件, 则

$$P(A) = 0.1 \times 0.2 + 0.1 \times 1 + 0.1 \times 2.6 + 0.05 \times 2 = 0.48$$

(3)50天未使用节水龙头的用水量为:

$$0.05 \times 1 + 0.15 \times 3 + 0.25 \times 2 + 0.35 \times 4 + 0.45 \times 9 + 0.55 \times 26 + 0.65 \times 5 = 24m^3$$

50天未使用节水龙头的用水量为:

$$0.05 \times 1 + 0.15 \times 5 + 0.25 \times 13 + 0.35 \times 10 + 0.45 \times 16 + 0.55 \times 5 = 17.5m^3$$

50天节约用水量为: $24 - 17.5 = 6.5m^3$

一年节约用水量为: $\frac{365}{50} \times 6.5 = 47.45m^3$

20.(12分)

设抛物线 $C: y^2 = 2x$, 点 $A(2,0)$, $B(-2,0)$, 过点 A 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点.

(1)当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 BM 的方程;

(2)证明: $\angle ABM = \angle ABN$.

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x + 1$ 或 $y = -\frac{1}{2}x - 1$ (2)见解析

【解析】(1)当 l 与 x 轴垂直时, $l: x = 2$.

$$\text{令 } x = 2, y_M = \pm 2$$

$$\therefore M(2, 2) \text{ 或 } (2, -2)$$

$$\therefore \text{直线 } BM: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2) \text{ 或 } y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\text{即 } y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ 或 } y = -\frac{1}{2}x - 1$$

(2)证明:

有题可得: 设 $l: x = ty + 2$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$

$$\begin{cases} x = ty + 2 \\ y^2 = 2x \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 2ty - 4 = 0$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2t \\ y_1 \cdot y_2 = -4 \end{cases}$$

$\therefore M, N$ 在 x 轴的上下两侧, 欲证 $\angle ABM = \angle ABN$

需证: $k_{BM} + k_{BN} = 0$

$$k_{BM} = \frac{y_1}{x_1 + 2}, \quad k_{BN} = \frac{y_2}{x_2 + 2}, \quad \text{即 } \frac{y_1}{x_1 + 2} + \frac{y_2}{x_2 + 2} = 0$$

$$\begin{aligned} k_{BM} + k_{BN} &= \frac{y_1(x_2 + 2) + y_2(x_1 + 2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = \frac{x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + 2(y_1 + y_2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} \\ &= \frac{(ty_2 + 2) \cdot y_1 + (ty_1 + 2) \cdot y_2 + 2(y_1 + y_2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2ty_1y_2 + 4(y_1 + y_2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = \frac{-8t + 8t}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = 0$$

得证, 即 $k_{BM} + k_{BN} = 0$

$\therefore \angle ABM = \angle ABN$

21.(12分)

已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$

(1)若 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 a , 并求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)证明: 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

【答案】见解析

【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x}$;

由题可知: $f'(2) = ae^2 - \frac{1}{2} = 0, \therefore a = \frac{1}{2e^2}$

$$f(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \ln x - 1 (x > 0) \quad f'(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 2e^2}{2e^2x}$$

$\therefore x > 0, \therefore \frac{1}{2e^2}e^x$ 为增函数, $\frac{1}{x}$ 为减函数.

$\therefore 2$ 为 $f'(x)$ 的唯一零点.

当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) < 0$ 时, $(0, 2)$ 为单调减区间;

当 $x \in (2, +\infty)$ $f'(x) > 0$ 时, $(2, +\infty)$ 为单调增区间.

(2) $f(x) = ae^x - \ln x - 1 (x > 0)$;

$$f'(x) = \frac{axe^x - 1}{x} \quad \text{令 } g(x) = axe^x - 1, g'(x) = ae^x(x+1)$$

令 $g'(x) = 0, x = -1, \therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore g_{\min}(x) = g(0) = -1, \therefore f'(x)$ 有零点.

令 $f'(x) = 0$, 即 $\frac{axe^x - 1}{x} > 0, \therefore a \geq \frac{1}{e}, \therefore$ 求得 $x = 1$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore f_{\min}(x) = f(1) = ae - 1, \therefore f_{\min}(x) \geq 0$.

(二)选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y = k|x| + 2$. 以坐标原点为极点,

x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为

$$\rho^2 + 2\rho \cos \theta - 3 = 0.$$

(1)求 C_2 的直角坐标方程;

(2)若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

【答案】 (1) $(x+1)^2 + y^2 = 4$ (2) $y = -\frac{4}{3}|x| + 2$

【解析】

(1)由题意可知:

曲线 C_2 的直角坐标方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 4$.

(2)曲线 C_2 是以 $(-1,0)$ 为圆心, 半径 $r=2$ 的圆

曲线 C_1 过定点 $(0,2)$

若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 即 $x > 0$ 时, C_1 与 C_2 相切

当 $x > 0$ 时, C_1 方程为 $kx - y + 2 = 0$

圆心到 C_1 距离 $d = \frac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$

解得 $k = -\frac{4}{3}$ 或 $k = 0$

当 $k = 0$ 时, 不满足有三个交点, 所以 $k = -\frac{4}{3}$

$$C_1 \text{ 方程为 } y = -\frac{4}{3}|x| + 2$$

23. [选修4—5: 不等式选讲](10分)

已知 $f(x) = |x+1| - |ax-1|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;

(2) 若 $x \in (0,1)$ 时不等式 $f(x) > x$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】

$$(1) \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \quad (2) a \in (0, 2]$$

【解析】

(1) 当 $a=1$ 时, $|x+1| - |x-1| > 1$

(i) 当 $x \leq -1$ 时, $-x-1-(1-x)-1 > 0$

解得: $-3 > 0$, 不成立

\therefore 此时无解

(ii) 当 $-1 < x < 1$ 时

$x+1-(1-x)-1 > 0$, 解得: $2x > 1$

$$\therefore x > \frac{1}{2}, \text{ 又 } \because -1 < x < 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 1$$

(iii) 当 $x \geq 1$ 时

$x+1-(x-1)-1 > 0$, 解得: $1 > 0$, 恒成立

$$\therefore x \geq 1$$

综上所述, 原不等式的解集为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

(2) 当 $x \in (0,1)$ 时

$$f(x) = x+1 - |ax-1| > x$$

$$\therefore 1 - |ax-1| > 0$$

$$\therefore |ax-1| < 1$$

$$\therefore -1 < ax - 1 < 1$$

$$0 < ax < 2$$

$$\therefore a > 0 \text{ 且 } a < \frac{2}{x}$$

$$g(x) = \frac{2}{x} \text{ 在 } (0,1) \text{ 单调递减}$$

$$\therefore g(x) < \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore a \in (0, 2]$$

新东方
XDF.CN



优能中学教育
U-CAN SECONDARY SCHOOL EDUCATION

新东方
XDF.CN



优能1对1
U-CAN ONE-ON-ONE LEARNING CENTER

新东方
XDF.CN

koolearn
新东方在线

新东方
XDF.CN



东方优播