2018 年北京市高考理科数学逐题解析

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.已知集合 $A=\{x||x|<2\}$, $B=\{-2,0,1,2\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$

C. $\{-2,0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

【答案】A

【解析】本题考查集合的运算.

集合 $A=\{x|-2<x<2\}$, $B=\{-2,0,1,2\}$,所以 $A\cap B=\{0,1\}$,故选 A.

2.在复平面内,复数 $\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$ 的共轭复数对应的点位于

A.第一象限　　B.第二象限

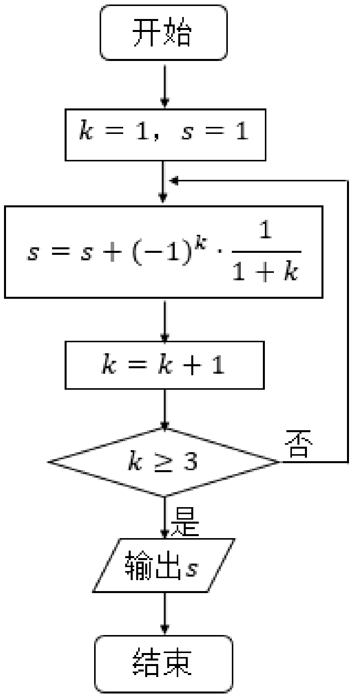
C.第三象限　　D.第四象限

【答案】D

【解析】本题考查复数.

设 $z=\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$,则 $\bar{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$,所以复数 $\bar{z}$ 对应点的坐标为 $(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2})$,位于第四象限,故选 D.

3.执行如图所示的程序框图,输出的 s 值为



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{7}{6}$　　D. $\frac{7}{12}$

【答案】B

【解析】本题考查程序框图.

初始: $k=1, s=1$;

第一次循环: $s=\frac{1}{2}, k=2$;

第二次循环: $s=\frac{5}{6}, k=3$.

k 满足 $k\geq 3$,输出 $s=\frac{5}{6}$.故选 B.

4.“十二平均律”是通用的音律体系,明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例,为这个理论的发展做出了重要贡献.十二平均律将一个纯八度音程分成十二份,依次得到十三个单音,从第二个单音起,每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$.若第一个单音的频率为 f,则第八个单音的频率为

A. $\sqrt[3]{2}f$　　B. $\sqrt[3]{2^2}f$

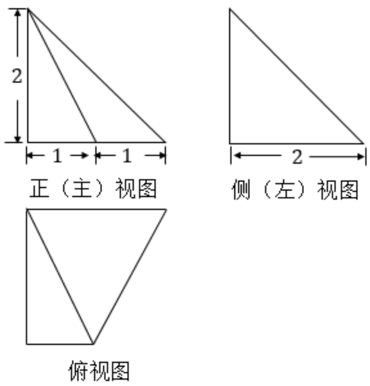
C. $\sqrt[12]{2^5}f$　　D. $\sqrt[12]{2^7}f$

【答案】D

【解析】本题考查等比数列.

由题意可知,单音的频率构成以 $a_1=f$ 为首项, $q=\sqrt[12]{2}$ 为公比的等比数列,则 $a_8=a_1q^7=f\cdot(\sqrt[12]{2})^7=\sqrt[12]{2^7}f$.故选 D.

5.某四棱锥的三视图如图所示,在此四棱锥的侧面中,直角三角形的个数为



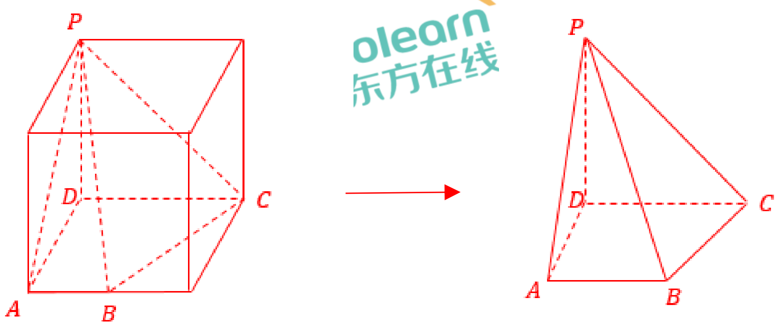
A.1　　B.2

C.3　　D.4

【答案】C

【解析】本题考查三视图

由图可知



$\triangle ADP$ 和 $\triangle CDP$ 为直角三角形

$\because AB\perp$ 平面 ADP , $AP\subset$ 平面 ADP

$\therefore AB\perp AP$

$\therefore\triangle ABP$ 为直角三角形.

$\because BC=\sqrt{5},PB=3,PC=2\sqrt{2}$

$\therefore\triangle BCP$ 不是直角三角形.

$\therefore$ 四个侧面中,有三个直角三角形.

故选 C.

6.设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为单位向量,则“$|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$”是“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】本题考查平面向量及充分必要条件.

由题意得

$|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}^2}$,

$|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{9\boldsymbol{a}^2+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}$.

必要性:

$\because |\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$

$\therefore \boldsymbol{a}^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}^2=9\boldsymbol{a}^2+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$

又 $\because |\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=1$,

$\therefore \boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=1$

$\therefore \boldsymbol{a}^2+9\boldsymbol{b}^2=9\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$

$\therefore -6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

$\therefore \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

必要性得证.

充分性:

$\because \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$

$\therefore \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$

又$\because |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 1$

$\therefore \boldsymbol{a}^2 - 6\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + 9\boldsymbol{b}^2 = 9\boldsymbol{a}^2 + 6\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2$

$\therefore (\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b})^2 = (3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2$

$\therefore |\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}| = |3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$

充分性得证.

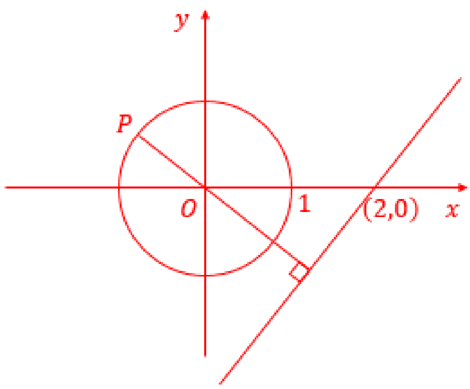
故选 C.

7.在平面直角坐标系中,记 d 为点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 到直线 $x - my - 2 = 0$ 的距离.当 θ, m 变化时, d 的最大值为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】C

【解析】本题考查直线与圆的位置关系.



点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 是单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的点,直线 $x-my-2=0$ 过定点 $(2,0)$,当直线与圆相离时,d 可取到最大值,设圆心到直线的距离为 d_0,

$d_0=\dfrac{2}{\sqrt{1+m^2}}$,$d=d_0+1=\dfrac{2}{\sqrt{1+m^2}}+1$,可知,当 $m=0$ 时,$d_{max}=3$.

故选 C.

8.设集合 $A=\{(x,y)\mid x-y\ge 1, ax+y>4, x-ay\le 2\}$,则

A.对任意实数 a,$(2,1)\in A$

B.对任意实数 a,$(2,1)\notin A$

C.当且仅当 $a<0$ 时,$(2,1)\notin A$

D.当且仅当 $a\le\dfrac{3}{2}$ 时,$(2,1)\notin A$

【答案】D

【解析】本题考查集合与线性规划.

根据选项可知,只需判断点 $(2,1)$ 是否在集合 A 内.

若点 $(2,1)\in A$,则需满足 $\begin{cases}2-1\ge 1\\ 2a+1>4\\ 2-a\le 2\end{cases}$,解得 $a>\dfrac{3}{2}$.

所以当且仅当 $a>\dfrac{3}{2}$ 时,$(2,1)\in A$;反之,当且仅当 $a\le\dfrac{3}{2}$ 时,$(2,1)\notin A$.

故选 D.

二、填空题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分。

9. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列,且 $a_1=3$,$a_2+a_5=36$,则 $\{a_n\}$ 的通项公式为

______.

【答案】$a_n=6n-3$

【解析】本题考查等差数列.

$a_2+a_5=(a_1+d)+(a_1+4d)=36$,

又∵ $a_1=3$,∴ $d=6$,∴ $a_n=3+(n-1)\times 6=6n-3$.

10.在极坐标系中,直线 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=a(a>0)$ 与圆 $\rho=2\cos\theta$ 相切,则 $a=$______.

【答案】$1+\sqrt{2}$

【解析】本题考查极坐标方程及直线与圆的位置关系.

直线方程为 $x+y-a=0$,

由 $\rho=2\cos\theta$ 得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$,

∴ $x^2+y^2=2x$,即 $(x-1)^2+y^2=1$,

∴圆心为 $(1,0)$,半径为 1.

∵直线与圆相切,

∴圆心到直线的距离 $d=r$,

即 $d=\dfrac{|1+0-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|1-a|}{\sqrt{2}}=1$,

解得 $a=1\pm\sqrt{2}$,

又∵ $a>0$,

∴ $a=1+\sqrt{2}$.

11.设函数 $f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$.若 $f(x)\le f(\frac{\pi}{4})$ 对任意的实数 x 都成立,则 ω 的最小值为______.

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】本题考查三角函数.

$\because$ $f(x)\le f(\frac{\pi}{4})$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,

$\therefore$ $f(\frac{\pi}{4})$ 为 $f(x)$ 的最大值,

$\therefore$ $f(\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6})=1$,

$\therefore$ $\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}=2k\pi$,

解得 $\omega=8k+\frac{2}{3}, k\in\mathbf{Z}$,

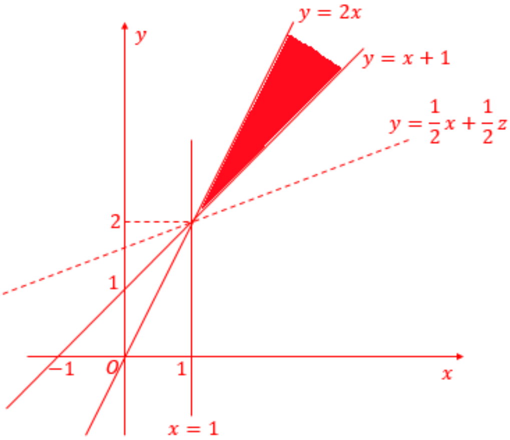
又 $\because$ $\omega>0$,

$\therefore$ ω 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

12.若 x,y 满足 $x+1\le y\le 2x$,则 $2y-x$ 的最小值是______.

【答案】3

【解析】本题考查线性规划.



由 $x+1\le y\le 2x$ 转化为

$$\begin{cases} y\ge x+1 \\ y\le 2x \\ x+1\le 2x \end{cases}$$

可行域如图所示,

令目标函数 $z=2y-x$

转化为 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ 在点 $(1,2)$ 处取得最小值,即最小值为3.

13.能说明"若 $f(x)>f(0)$ 对任意的 $x\in(0,2]$ 都成立,则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上是增函数"为假命题的一个函数是______.

【答案】$y=\sin x$（答案不唯一）

【解析】本题考查函数与简易逻辑.

$y=\sin x$ 在 $(0,2]$ 上满足 $f(x)>f(0)$,且在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上为增函数,在 $(\frac{\pi}{2},2]$ 上为减函数.

14.已知椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,双曲线 $N:\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$.若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点,则椭圆 M 的离心率为______;双曲线 N 的离心率为______.

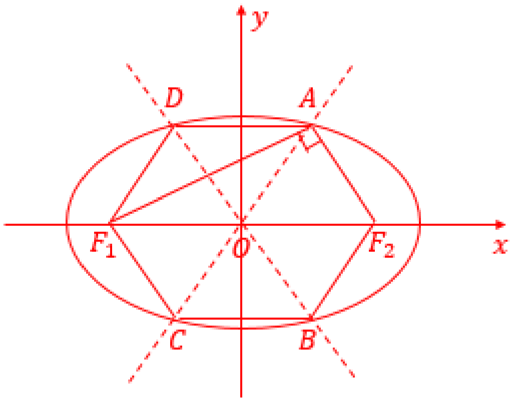
【答案】$\sqrt{3}-1;2$

【解析】本题考查圆锥曲线（椭圆和双曲线）.

①如图:连接 AF_1,

由正六边形的性质可知,$\triangle AF_2F_1$ 为直角三角形,且 $\angle AF_2F_1=60^\circ$,

$\angle AF_1F_2=30^\circ$.



所以在 $\triangle AF_2F_1$ 中,

$|AF_2|=c, |AF_1|=\sqrt{3}c.$

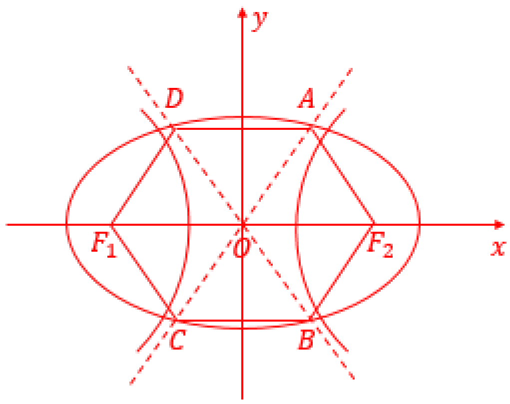
又由椭圆的定义可知,

$|AF_1|+|AF_2|=2a, |F_1F_2|=2c.$

$\therefore (1+\sqrt{3})c=2a$,

$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

②由正六边形的性质可知,



$\angle AOF_2=60^\circ$,

$\tan\angle AOF_2=\sqrt{3}=\dfrac{n}{m}$,

又由双曲线的性质可知:

$\therefore e=\sqrt{1+(\dfrac{n}{m})^2}=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2$.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15.（本小题 13 分）

在$\triangle ABC$中，$a=7, b=8, \cos B=-\frac{1}{7}$.

（Ⅰ）求$\angle A$;

（Ⅱ）求AC边上的高.

【答案】$\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】

（Ⅰ）在$\triangle ABC$中

$\because \cos B=-\frac{1}{7}$

$\therefore B\in(\frac{\pi}{2},\pi)$

$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

由正弦定理得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{7}{\sin A}=\frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$$

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\because B\in(\frac{\pi}{2},\pi)$

$\therefore A\in(0,\frac{\pi}{2})$

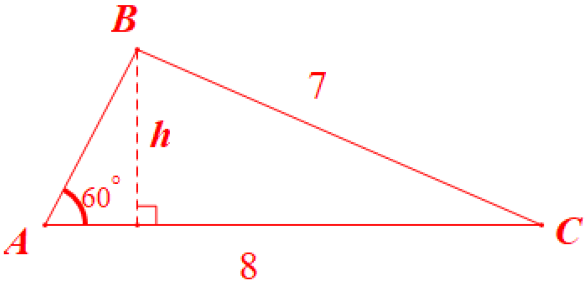
$\therefore \angle A=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）$\sin C=\sin(\pi-C)=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\frac{1}{7})+\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{14}$



如图所示,在$\triangle ABC$中

$\because \sin C=\frac{h}{BC}$

$\therefore h=BC\cdot\sin C=7\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore AC$边上的高为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

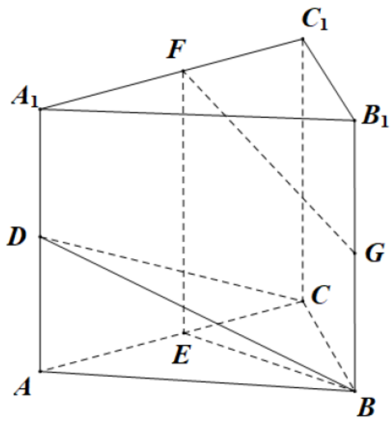
16.（本小题 14 分）

如图,在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,$CC_1\perp$平面ABC,D,E,F,G分别为AA_1,AC,A_1C_1,BB_1的中点,$AB=BC=\sqrt{5},AC=AA_1=2.$

（Ⅰ）求证:$AC\perp$平面BEF;

（Ⅱ）求二面角$B-CD-C_1$的余弦值;

（Ⅲ）证明:直线FG与平面BCD相交.



【解析】

（Ⅰ）$\because BA=BC,E$为AC的中点

$\therefore BE\perp AC$

$\because D,E,F,G$ 分别为 AA_1,AC,A_1C_1,BB_1 的中点

$\therefore EF // AA_1 // CC_1$

$\because CC_1 \perp$ 平面 ABC $\therefore EF \perp$ 平面 ABC

$\because AC \subset$ 平面 ABC $\therefore EF \perp AC$

$\because EF \cap BE = E, EF \subset$ 平面 BEF , $BE \subset$ 平面 BEF

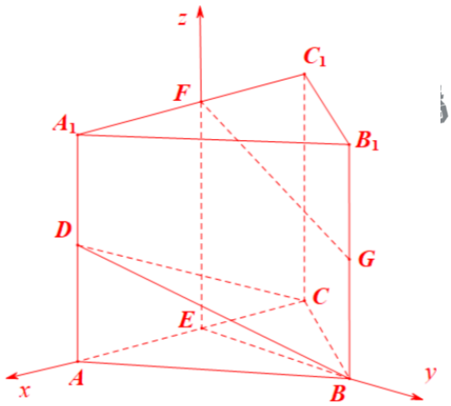
$\therefore AC \perp$ 平面 BEF

（Ⅱ）$\because EA, EB, EF$ 两两垂直

$\therefore$ 建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$

$\because AC = 2, E$ 为 AC 的中点

$\therefore EA = EC = 1$



在 $Rt\triangle ABC$ 中

$\angle BEC = 90^\circ, BC^2 = BE^2 + EC^2$

$\therefore BE = 2$

$\therefore A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(-1,0,0)$,

$A_1(1,0,2), D(1,0,1), C_1(-1,0,2), B_1(0,2,2), G(0,2,1)$

$\because BE \perp AC, BE \perp EF, AC \cap EF = E$

$\therefore BE \perp$ 平面 ACC_1A_1

$\therefore$ 平面 CDC_1 的法向量为 $\overrightarrow{EB} = (0,2,0)$

$\therefore \overrightarrow{CD} = (2,0,1), \overrightarrow{CB} = (1,2,0)$

设平面 BCD 的法向量为 $\vec{n} = (a,b,c)$

$\therefore \begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 2a+c=0 \\ a+2b=0 \end{cases}$

令 $a=2$

$\therefore b=-1, c=-4$

$\therefore$ 平面 BCD 的法向量 $\vec{n}=(2,-1,-4)$

$\therefore \cos<\vec{n},\overrightarrow{EB}>=\dfrac{-2}{2\times\sqrt{21}}=-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

由图可得二面角 $B-CD-C_1$ 为钝角

所以二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

（III）平面 BCD 的法向量为 $\vec{n}=(2,-1,-4)$

$\because G(0,2,1), F(0,0,2)$

$\therefore \overrightarrow{GF}=(0,-2,1)$

$\therefore \vec{n}\cdot\overrightarrow{GF}=-2$

$\therefore \vec{n}$ 与 $\overrightarrow{GF}$ 不垂直

$\therefore GF$ 与平面 BCD 不平行且不在平面 BCD 内

$\therefore GF$ 与平面 BCD 相交

17.（本小题 12 分）

电影公司随机收集了电影的有关数据,经分类整理得到下表:

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类

电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指:一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值.

假设所有电影是否获得好评相互独立.

（Ⅰ）从电影公司收集的电影中随机选取1部,求这部电影是获得好评的第四类电影的概率;

（Ⅱ）从第四类电影和第五类电影中各随机选取1部,估计恰有1部获得好评的概率;

（Ⅲ）假设每类电影得到人们喜欢的概率与表格中该类电影的好评率相等,用“$\xi_k=1$”表示第k类电影得到人们喜欢,“$\xi_k=0$”表示第k类电影没有得到人们喜欢$(k=1,2,3,4,5,6)$，写出方差$D\xi_1,D\xi_2,D\xi_3,D\xi_4,D\xi_5,D\xi_6$的大小关系.

【答案】$0.025;0.35;D\xi_1>D\xi_4>D\xi_2=D\xi_5>D\xi_3>D\xi_6$

【解析】（Ⅰ）设“从电影公司收集的电影中随机选取1部,这部电影是获得好评的第四类电影”为事件A,

第四类电影中获得好评的电影为$200\times0.25=50$部,

$$P(A)=\frac{50}{140+50+300+200+800+510}=\frac{50}{2000}=0.025.$$

（Ⅱ）设“第四类电影和第五类电影中各随机选取1部,恰有1部获得好评”为事件B,

$P(B)=0.25\times0.8+0.75\times0.2=0.35$

（III）由题意可知,定义随机变量如下:

$$\xi_k=\begin{cases}0 & ,第k类电影没有得到人们喜欢\\ 1 & ,第k类电影得到人们喜欢\end{cases}$$

则 ξ_k 显然服从两点分布,则六类电影的分布列及方差计算如下:

第一类电影:

ξ_1	1	0
P	0.4	0.6

$E(\xi_1)=1\times0.4+0\times0.6=0.4$

$D\xi_1=(1-0.4)^2\times0.4+(0-0.4)^2\times0.6=0.24$

第二类电影:

ξ_2	1	0
P	0.2	0.8

$E(\xi_2)=1\times0.2+0\times0.8=0.2$

$D\xi_2=(1-0.2)^2\times0.2+(0-0.2)^2\times0.8=0.16$

第三类电影:

ξ_3	1	0
P	0.15	0.85

$E(\xi_3)=1\times0.15+0\times0.85=0.15$

$D\xi_3=(1-0.15)^2\times0.15+(0-0.15)^2\times0.85=0.1275$

第四类电影:

ξ_4	1	0
P	0.25	0.75

$E(\xi_4)=1\times 0.25+0\times 0.75=0.25$

$D\xi_4=(1-0.25)^2\times 0.25+(0-0.25)^2\times 0.75=0.1875$

第五类电影:

ξ_5	1	0
P	0.2	0.8

$E(\xi_5)=1\times 0.2+0\times 0.8=0.2$

$D\xi_5=(1-0.2)^2\times 0.2+(0-0.2)^2\times 0.8=0.16$

第六类电影:

ξ_6	1	0
P	0.1	0.9

$E(\xi_6)=1\times 0.1+0\times 0.9=0.1$

$D\xi_6=(1-0.1)^2\times 0.1+(0-0.1)^2\times 0.9=0.09$

综上所述,$D\xi_1>D\xi_4>D\xi_2=D\xi_5>D\xi_3>D\xi_6$

（备注:两点分布的方差计算公式$D\xi=P(1-P)$）

18.（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行,求 a;

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值,求 a 的取值范围.

【答案】$a=1;a\in(\frac{1}{2},+\infty)$

【解析】

（Ⅰ） $f'(x)=[2ax-(4a+1)]e^x+[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x,x\in\mathbf{R}$

$=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x$

$=(ax-1)(x-2)e^x$

因为在$(1,f(1))$处的切线与x轴平行,所以$f'(1)=0,a-1=0,a=1$

经检验,$a=1$时,切线与x轴不重合.

所以$a=1$

（Ⅱ）

（i）当$a=0$时,令$f'(x)=0,x=2$

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↑	极大值	↓

所以,当$x=2$时,$f(x)$取极大值,不符合题意.

（ii）当$a<0$时,令$f'(x)=0,x_1=\frac{1}{a},x_2=2$

x	$(-\infty,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↓	极小值	↑	极大值	↓

所以,当 $x=2$ 时, $f(x)$ 取极大值,不符合题意.

（iii）当 $a>0$ 时

（1）当 $\frac{1}{a}<2$ 时,即 $a>\frac{1}{2}$ 时

x	$(-\infty,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

所以,当 $x=2$ 时, $f(x)$ 取极小值,符合题意.

（2）当 $\frac{1}{a}=2$ 时,即 $a=\frac{1}{2}$ 时, $f'(x)\geq 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以无极值,不符合题意.

（3）当 $\frac{1}{a}>2$ 时,即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时.

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

所以,当 $x=2$ 时, $f(x)$ 取极大值,不符合题意.

综上所述: $a\in(\frac{1}{2},+\infty)$

19.（本小题 14 分）

已知抛物线 $C:y^2=2px$ 经过点 $P(1,2)$.过点 $Q(0,1)$ 的直线 l 与抛物

线C有两个不同的交点A,B,且直线PA交y轴于M,直线PB交y轴于N.

（Ⅰ）求直线l的斜率的取值范围;

（Ⅱ）设O为原点,$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO},\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$,求证:$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$为定值.

【答案】$(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,1)$; 2

【解析】（Ⅰ）依题意,抛物线$y^2=2px$经过点$P(1,2)$,

可得:$4=2p$,解得$p=2$,所以抛物线的方程为$y^2=4x$.

由题意可知直线l的斜率存在,设直线l的斜率为k,

由题意可知$k\neq 0$

①若直线l恰好过点$P(1,2)$,此时$k=\frac{2-1}{1-0}=1$

由题意可知直线l不能过点P,

∴直线l的斜率$k\neq 1$

②若直线l与抛物线的一个交点恰为$(1,-2)$,

此时该点与P点所在直线斜率不存在,

则该直线与y轴无交点,与题目条件矛盾

此时$k=\frac{-2-1}{1-0}=-3$

∴直线l的斜率$k\neq -3$

③设直线l的方程为$y=kx+1$,设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

联立$\begin{cases} y=kx+1 \\ y^2=4x \end{cases}$,消 y 整理可得:$k^2x^2+(2k-4)x+1=0$.

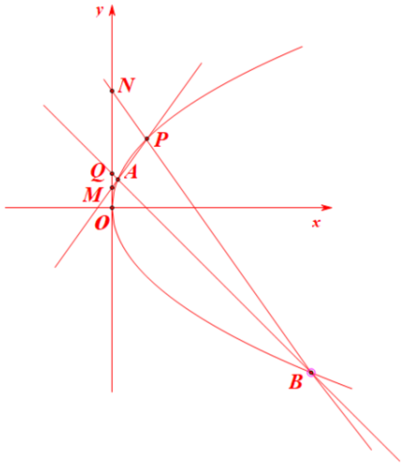
$\because$ 直线l与抛物线有两个不同的交点,

$\therefore \Delta=(2k-4)^2-4k^2>0$,解得:$k<1$.

综上所述,k的取值范围是$(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,1)$

(Ⅱ)因为$A(x_1,y_1)B(x_2,y_2),P(1,2),Q(0,1)$,

所以直线PA的方程为$y-2=\dfrac{y_1-2}{x_1-1}(x-1)$,



令$x=0$,解得$y=\dfrac{2-y_1}{x_1-1}+2=\dfrac{2x_1-y_1}{x_1-1}$,

所以M的坐标为$(0,\dfrac{2x_1-y_1}{x_1-1})$.

同理可得:N的坐标为$(0,\dfrac{2x_2-y_2}{x_2-1})$.

所以

$\overrightarrow{QM}=(0,\dfrac{2x_1-y_1}{x_1-1}-1),\overrightarrow{QN}=(0,\dfrac{2x_2-y_2}{x_2-1}-1),\overrightarrow{QO}=(0,-1)$,

由$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO},\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$可得:

$\dfrac{2x_1-y_1}{x_1-1}-1=-\lambda,\dfrac{2x_2-y_2}{x_2-1}-1=-\mu$

所以$\lambda=1-\dfrac{2x_1-y_1}{x_1-1}=\dfrac{x_1-1-2x_1+(kx_1+1)}{x_1-1}=\dfrac{x_1(k-1)}{x_1-1}$,

同理可得:$\mu=\dfrac{x_2(k-1)}{x_2-1}$.

所以$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{x_1-1}{x_1(k-1)}+\dfrac{x_2-1}{x_2(k-1)}=\dfrac{1}{k-1}(\dfrac{x_1-1}{x_1}+\dfrac{x_2-1}{x_2})$

$=\frac{1}{k-1}\cdot\frac{2x_1x_2-(x_1+x_2)}{x_1x_2}$

由（Ⅰ）可得: $x_1+x_2=\frac{4-2k}{k^2}, x_1x_2=\frac{1}{k^2}$,

所以 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{k-1}\cdot\frac{2\cdot\frac{1}{k^2}-\frac{4-2k}{k^2}}{\frac{1}{k^2}}=\frac{1}{k-1}\cdot(2k-2)=2$.

所以 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$ 为定值 2

20.（本小题 14 分）

设 n 为正整数,集合 $A=\{\alpha\,|\,\alpha=(t_1,t_2,t_3,\cdots t_n),t_k\in\{0,1\},k=1,2,\cdots,n\}$. 对于集合 A 中的任意元素 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, 记 $M(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[(x_1+y_1-|x_1-y_1|)+(x_2+y_2-|x_2-y_2|)+\cdots+(x_n+y_n-|x_n-y_n|)]$.

（Ⅰ）当 $n=3$ 时,若 $\alpha=(1,1,0)$, $\beta=(0,1,1)$, 求 $M(\alpha,\alpha)$ 和 $M(\alpha,\beta)$ 的值;

（Ⅱ）当 $n=4$ 时,设 B 是 A 的子集,且满足:对于 B 中的任意元素 α,β, 当 α,β 相同时, $M(\alpha,\beta)$ 是奇数;当 α,β 不同时, $M(\alpha,\beta)$ 是偶数.求集合 B 中元素个数的最大值;

（Ⅲ）给定不小于 2 的 n, 设 B 是 A 的子集,且满足:对于 B 中的任意两个不同的元素 α,β, $M(\alpha,\beta)=0$. 写出一个集合 B, 使其元素个数最多,并说明理由.

【解析】

（Ⅰ） $M(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2}[(1+1-|1-1|)+(1+1-|1-1|)+(0+0-|0-0|)]=2$;

$M(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[(1+0-|1-0|)+(1+1-|1-1|)+(0+1-|0-1|)]=1$

（Ⅱ）当 x_m,y_m 同为1时, $\frac{1}{2}(x_m+y_m-|x_m-y_m|)=1$;

当 x_m,y_m 中只有一个1或者两个都是0时, $\frac{1}{2}(x_m+y_m-|x_m-y_m|)=0$;

当 α,β 相同时, $\forall\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in B$, $M(\alpha,\alpha)=x_1+x_2+x_3+x_4$ 为奇数;

则 $x_k(k=1,2,3,4)$ 中有一个1或者三个1,即为以下8种:

形式1: $(1,0,0,0)$ $(0,1,0,0)$ $(0,0,1,0)$ $(0,0,0,1)$;

形式2: $(1,1,1,0)$ $(1,1,0,1)$ $(1,0,1,1)$ $(0,1,1,1)$;

当 α,β 不同时, $M(\alpha,\beta)$ 是偶数,则 α,β 同为1的位置有4个或2个或者0个;

形式1中的元素不能和形式2的三个元素同时共存;

形式2中的元素不能和形式1的三个元素同时共存;

所以 B 中元素至多为4个;

如果 B 中元素全是形式1,当 α,β 不同时, $M(\alpha,\beta)=0$ 满足条件;

如果 B 中元素全是形式2,当 α,β 不同时, $M(\alpha,\beta)=2$ 满足条件

（Ⅲ） B 中元素个数最多为 $n+1$,构造如下:

对于 $\gamma_k=(z_{k1},z_{k2},\cdots,z_{kn})\in B(k=1,2,3,\cdots,n)$, $z_{kk}=1$,其他位置全为0;

$\gamma_{n+1}=(0,0,0,\cdots,0)$,可以验证 $M(\gamma_i,\gamma_j)=0(i,j=1,2,\cdots,n+1)$ 且 $i\neq j$;

下面证明:当 B 中元素个数大于等于 $n+2$ 时,总存在 $\alpha,\beta\in B$,

$M(\alpha,\beta)\neq0$

设 $\gamma_k=(z_{k1},z_{k2},z_{k3},\cdots,z_{kn})\in B,k=1,2,3,\cdots,n+1,\cdots,m(m\geq n+2)$;

$S_k=z_{k1}+z_{k2}+\cdots+z_{kn}(k=1,2,3,\cdots,n)$,可以得到:

$S_1+S_2+\cdots+S_m\geq 0+1\times n+2=n+2$;

记 $C_k=z_{1k}+z_{2k}+\cdots+z_{mk}(k=1,2,3,\cdots,n)$,可以得到:

$C_1+C_2+\cdots+C_n=S_1+S_2+\cdots+S_m\geq n+2$,所以 $\exists C_t\geq 2,t\in\{1,2,3,\cdots,n\}$

即存在 $\alpha,\beta\in B(\alpha\neq\beta)$,使得 α,β 在同一个位置同为 1,即 $M(\alpha,\beta)\geq 1\neq 0$,矛盾.

所以,B 中元素个数最多为 $n+1$