

2018年北京市高考文科数学试卷

一、选择题（本部分共8小题，每小题5分，共40分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 已知集合 $A = \{x \mid |x| < 2\}$ ， $B = \{-2, 0, 1, 2\}$ ，则 $A \cap B =$

A. $\{0, 1\}$

B. $\{-1, 0, 1\}$

C. $\{-2, 0, 1, 2\}$

D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

【答案】A

【解析】此题考查集合的运算

集合 $A = \{x \mid |x| < 2\} = \{x \mid -2 < x < 2\}$ ，

集合 $B = \{-2, 0, 1, 2\}$ ，

所以 $A \cap B = \{0, 1\}$ ，故选A.

2. 在复平面内，复数 $\frac{1}{1-i}$ 的共轭复数对应的点位于

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】D

【解析】此题考查复数的运算

$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ 的共轭复数为 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ ，

对应点为 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ，在第四象限，故选D.

3. 执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{7}{6}$

D. $\frac{7}{12}$

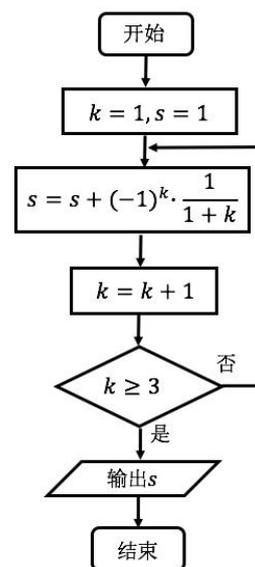
【答案】 B

【解析】 此题考查程序框图

$$k=1 \quad s=1$$

$$k=2 \quad s=1+(-1)^1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$k=3 \quad s=\frac{1}{2}+(-1)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \text{ 故选 } B.$$



4. 设 a, b, c, d 是非零实数，则“ $ad=bc$ ”是“ a, b, c, d 成等比数列”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 此题考查充分必要条件

当 $a=4, b=1, c=1, d=\frac{1}{4}$ 时， a, b, c, d 不为等比数列，所以不是

充分条件.

当 a, b, c, d 为等比数列时，则 $ad=bc$ ，所以是必要条件.

综上所述，“ $ad=bc$ ”是“ a, b, c, d 成等比数列”的必要而不充分条件，故选 B.

8. 设集合 $A = \{(x, y) | x - y \geq 1, ax + y > 4, x - ay \leq 2\}$, 则

- A. 对任意实数 a , $(2, 1) \in A$
- B. 对任意实数 a , $(2, 1) \notin A$
- C. 当且仅当 $a < 0$ 时, $(2, 1) \notin A$
- D. 当且仅当 $a \leq \frac{3}{2}$ 时, $(2, 1) \notin A$

【答案】D

【解析】此题考查线性规划的应用

若 $(2, 1) \in A$, 则 $a > \frac{3}{2}$ 且 $a \geq 0$,

即若 $(2, 1) \in A$, 则 $a > \frac{3}{2}$,

此命题的逆否命题为: 若 $a \leq \frac{3}{2}$ 则有 $(2, 1) \notin A$,

故选 D.

二、填空题共6题，每小题5分，共30分

9. 设向量 $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, m)$. 若 $\mathbf{a} \perp (m\mathbf{a} - \mathbf{b})$, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】 此题考查向量的运算

$$\because \mathbf{a} = (1, 0), \quad \mathbf{b} = (-1, m)$$

$$\therefore m\mathbf{a} - \mathbf{b} = (m, 0) - (-1, m) = (m+1, -m)$$

由 $\mathbf{a} \perp (m\mathbf{a} - \mathbf{b})$ 得: $\mathbf{a} \cdot (m\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$

$$\therefore \mathbf{a} \cdot (m\mathbf{a} - \mathbf{b}) = m + 1 = 0$$

即 $m = -1$

10. 已知直线 l 过点 $(1, 0)$ 且垂直于 x 轴. 若 l 被抛物线 $y^2 = 4ax$ 截得的线段长为4, 则抛物线的焦点坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(1, 0)$

【解析】 此题考查抛物线的相关知识

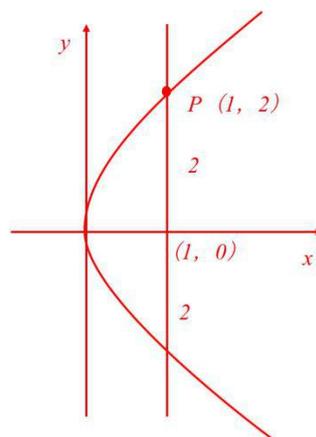
由题可得: 点 $P(1, 2)$ 在抛物线上, 将 $P(1, 2)$ 代入 $y^2 = 4ax$ 中

解得: $a = 1$

$$\therefore y^2 = 4x$$

由抛物线方程可得: $2p = 4$, $p = 2$, $\frac{p}{2} = 1$

\therefore 焦点坐标为 $(1, 0)$



11. 能说明“若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”为假命题的一组 a, b 的值依次为_____.

【答案】1, -1 (答案不唯一)

【解析】此题考查不等式的运算

使“若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”为假命题

则使“若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ ”为真命题即可

只需让 $a = 1, b = -1$ 即可满足

所以满足条件的一组 a, b 的值为1, -1 (答案不唯一)

12. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 (a > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 $a =$ _____.

【答案】4

【解析】此题考查双曲线的基本知识

在双曲线中, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 4}$, 且 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\therefore \frac{\sqrt{a^2 + 4}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{a^2 + 4}{a^2} = \frac{5}{4}$$

$$4a^2 + 16 = 5a^2$$

$$a^2 = 16$$

$$\because a > 0$$

$$\therefore a = 4$$

13. 若 x, y 满足 $x+1 \leq y \leq 2x$, 则 $2y-x$ 的最小值是_____.

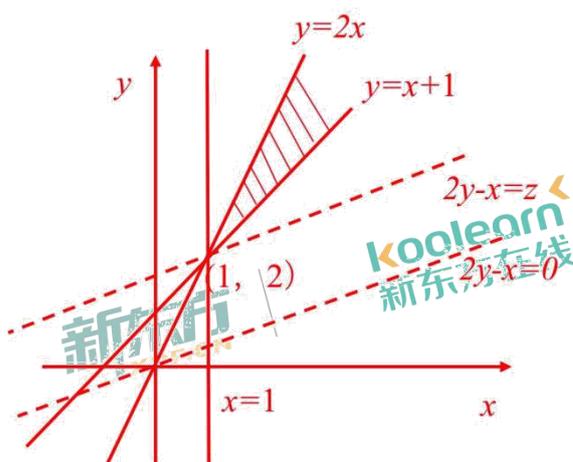
【答案】 3

【解析】 此题考查线性规划

不等式可转化为 $\begin{cases} y \geq x+1 \\ y \leq 2x \\ x+1 \leq 2x \end{cases}$

即 $\begin{cases} y \geq x+1 \\ y \leq 2x \\ x \geq 1 \end{cases}$

\therefore 满足条件的 x, y 在平面直角坐标系中的可行域为



令 $2y - x = z$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$$

由图象可知

当 $2y - x = z$ 过点 $(1, 2)$ 时

z 取最小值, 此时 $z = 2 \times 2 - 1 = 3$

$\therefore 2y - x$ 的最小值为 3

14. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2)$, 且 $\angle C$ 为钝角, 则 $\angle B =$ _____;

$\frac{c}{a}$ 的取值范围是 _____.

【答案】 $\frac{\pi}{3}, (2, +\infty)$

【解析】 此题考查解三角形的综合运用

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2) = \frac{1}{2}ac \sin B$$

$$\therefore \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \cos B = \frac{\sin B}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \frac{\sin B}{\cos B} = \sqrt{3}, \quad \angle B = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin(\frac{2\pi}{3} - A)}{\sin A}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos A - (-\frac{1}{2}) \cdot \sin A}{\sin A}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{2}$$

$$\because \angle C \text{ 为钝角}, \quad \angle B = \frac{\pi}{3}, \quad \therefore 0 < \angle A < \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \tan A \in (0, \frac{\sqrt{3}}{3}), \quad \frac{1}{\tan A} \in (\sqrt{3}, +\infty)$$

$$\text{故 } \frac{c}{a} \in (2, +\infty)$$

三、解答题共6题，共80分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. (本题满分13分)

设 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_1 = \ln 2$ ， $a_2 + a_3 = 5 \ln 2$ 。

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 求 $e^{a_1} + e^{a_2} + \dots + e^{a_n}$ 。

【解析】

(I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，

$$\because a_2 + a_3 = 5 \ln 2,$$

$$\therefore a_1 + d + a_1 + 2d = 5 \ln 2,$$

$$\because a_1 = \ln 2, \therefore d = \ln 2$$

$$\because \text{等差数列 } \{a_n\} \text{ 中 } a_n = a_1 + (n-1)d = n \ln 2,$$

$$\therefore a_n = n \ln 2, n \in \mathbf{N}^*.$$

(II) 由(I)知 $a_n = n \ln 2$ ，

$$\because e^{a_n} = e^{n \ln 2} = e^{\ln 2^n} = 2^n,$$

$\therefore \{e^{a_n}\}$ 是以2为首项，2为公比的等比数列

$$\therefore e^{a_1} + e^{a_2} + \dots + e^{a_n}$$

$$= e^{\ln 2} + e^{\ln 2^2} + \dots + e^{\ln 2^n}$$

$$= 2 + 2^2 + \dots + 2^n$$

$$= \frac{2(1-2^{n+1})}{1-2}$$

$$= 2^{n+1} - 2$$

\therefore 所求为 $2^{n+1} - 2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

16. (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x$

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, m\right]$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$, 求 m 的最小值.

【解析】

$$(I) f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$= \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) \text{ 的最小正周期为: } T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$(II) x \in \left[-\frac{\pi}{3}, m\right] \text{ 故 } 2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, 2m - \frac{\pi}{6}\right]$$

$$f(x)_{\max} = \left[\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \right]_{\max} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x)_{\max} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \left[\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \right]_{\max} = 1$$

$$\therefore \text{当 } 2m - \frac{\pi}{6} \geq \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \left[\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \right]_{\max} = 1$$

$$\therefore m \geq \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore m \text{ 的最小值为 } \frac{\pi}{3}$$

17. (本小题 13 分)

电影公司随机收集了电影的有关数据，经分类整理得到下表：

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类
电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指：一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值。

(I) 从电影公司收集的电影中随机选取 1 部，求这部电影是获得好评的第四类电影的概率；

(II) 随机选取 1 部电影，估计这部电影没有获得好评的概率；

(III) 电影公司为增加投资回报，拟改变投资策略，这将导致不同类型电影的好评率发生变化. 假设表格中只有两类电影的好评率数据发生变化，那么哪类电影的好评率增加 0.1，哪类电影的好评率减少 0.1，使得获得好评的电影总部数与样本中的电影总部数的比值达到最大？（只需写出结论）

【解析】

(I) 设“从电影公司收集的电影中随机选 1 部，这部电影是获得好评的第四类电影”为事件 A .

电影公司共收集电影 2000 部.

第四类电影中获好评的有 $200 \times 0.25 = 50$ 部.

由古典概型：
$$P(A) = \frac{50}{2000} = \frac{1}{40}.$$

(II) 设“随机选取1部电影，这部电影没有获得好评”为事件 B .

没有获得好评的电影共有

$$140 \times 0.6 + 50 \times 0.8 + 300 \times 0.85 + 200 \times 0.75 + 800 \times 0.8 + 510 \times 0.9 \\ = 1628 \text{ 部}$$

由古典概型： $P(B) = \frac{1628}{2000} = 0.814$.

(III) 第五类好评率增加0.1，第二类好评率减少0.1.

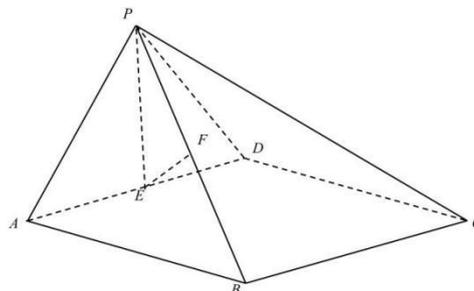
18. (本小题满分 14 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp PD$, $PA = PD$, E, F 分别为 AD, PB 的中点.

(I) 求证: $PE \perp BC$;

(II) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD ;

(III) 求证: $EF \parallel$ 平面 PCD .



【解析】

(I) 证明:

$\because PA = PD$, 且 E 为 AD 中点, $\therefore PE \perp AD$

\because 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$

$PE \subset$ 平面 PAD

$\therefore PE \perp$ 平面 $ABCD$

$\because BC \subset$ 平面 $ABCD$

$\therefore PE \perp BC$

(II) \because 四边形 $ABCD$ 为矩形.

$\therefore CD \perp AD$

\because 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

$CD \subset$ 平面 $ABCD$

$\therefore CD \perp$ 平面 PAD

$\because PA \subset$ 平面 PAD

$\therefore CD \perp PA$

$\because PA \perp PD$, 且 $CD, PD \subset$ 平面 PCD , $CD \cap PD = D$

$\therefore PA \perp$ 平面 PCD

$\because PA \subset$ 平面 PAB

\therefore 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD

(III) 取 PC 中点 G , 连接 FG, GD

$\because F, G$ 分别为 PB 和 PC 中点

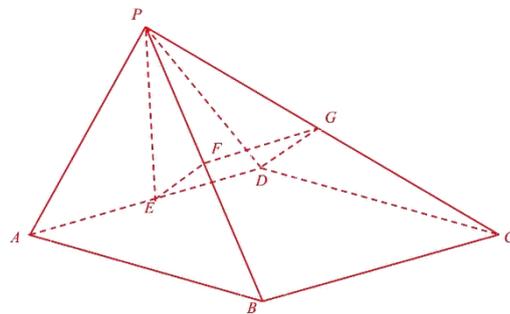
$\therefore FG \parallel BC, FG = \frac{1}{2}BC$

\because 四边形 $ABCD$ 为矩形.

$\therefore BC \parallel AD, BC = AD$

$\because E$ 为 AD 中点

$\therefore ED = \frac{1}{2}AD$



$$\therefore ED \parallel BC, ED = \frac{1}{2}BC$$

$$\therefore ED \parallel FG, ED = FG$$

\therefore 四边形 $EFGD$ 为平行四边形

$$\therefore EF \parallel GD$$

$\therefore EF \not\subset$ 平面 PCD 且 $GD \subset$ 平面 PCD

$$\therefore EF \parallel \text{平面 } PCD$$

新东方
XDF.CN

koolearn
新东方在线

新东方
XDF.CN

东方优播
OPUB

19. (本小题 13 分)

设函数 $f(x) = [ax^2 - (3a+1)x + 3a+2]e^x$.

(I) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线斜率为 0, 求 a ;

(II) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 求 a 的取值范围.

【解析】

(I) $\because f(x) = [ax^2 - (3a+1)x + 3a+2]e^x$

$\therefore f'(x) = [ax^2 - (a+1)x + 1]e^x$

$\therefore f'(2) = (2a-1)e^2 = 0$

$\therefore a = \frac{1}{2}$

(II) $f'(x) = (ax-1)(x-1)e^x$

① 当 $a=0$ 时, 令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$

$f(x)$, $f(x)$ 随 x 变化如下表:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		极大值	

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 (舍)

② 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x)=0$ 得 $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = 1$

(1) 当 $x_1 = x_2$, 即 $a=1$ 时

$f'(x) = (x-1)^2 e^x \geq 0$

$\therefore f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增

$\therefore f(x)$ 无极值 (舍)

(2) 当 $x_1 > x_2$, 即 $0 < a < 1$ 时

$f'(x)$, $f(x)$ 随 x 变化如下表:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		极大值		极小值	

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值 (舍)

(3) 当 $x_1 < x_2$, 即 $a > 1$ 时

$f'(x)$, $f(x)$ 随 x 变化如下表:

x	$(-\infty, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		极大值		极小值	

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值

即 $a > 1$ 成立

③ 当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = 1$

$f'(x)$, $f(x)$ 随 x 变化如下表:

x	$(-\infty, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		极小值		极大值	

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值 (舍)

综上所述: a 的取值范围为 $(1, +\infty)$

20. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 焦距为 $2\sqrt{2}$,

斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A, B .

(I) 求椭圆 M 的方程;

(II) 若 $k=1$, 求 $|AB|$ 的最大值;

(III) 设 $P(-2, 0)$, 直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C , 直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D . 若 C, D 和点 $Q(-\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$ 共线, 求 k .

【解析】

(I) 由题意得 $2c = 2\sqrt{2}$, $\therefore c = \sqrt{2}$

又 $\because e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\therefore a = \sqrt{3}$

$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 1$, \therefore 椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$

(II) 设直线 AB 的方程为: $y = x + m$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

$$\text{联立} \begin{cases} y = x + m \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \end{cases} \text{得: } 4x^2 + 6mx + 3m^2 - 3 = 0$$

又 $\because \Delta = 36m^2 - 4 \times 4(3m^2 - 3) = 48 - 12m^2 > 0$, $\therefore m^2 < 4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{3m}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3m^2 - 3}{4} \end{cases}$$

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \times \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{4-m^2}}{2}$$

$\therefore m^2 = 0$ 时, $|AB|_{\max} = \sqrt{6}$

(III) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$

$$x_1^2 + 3y_1^2 = 3 \text{ ①}, \quad x_2^2 + 3y_2^2 = 3 \text{ ②}$$

又 $\because P(-2, 0)$, 故设 $k_1 = k_{PA} = \frac{y_1}{x_1 + 2}$, \therefore 直线 PA 的方程为: $y = k_1(x + 2)$

联立 $\begin{cases} y = k_1(x + 2) \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \end{cases}$, 消 y 得 $(1 + 3k_1^2)x^2 + 12k_1^2x + 12k_1^2 - 3 = 0$

$$x_1 + x_3 = -\frac{12k_1^2}{1 + 3k_1^2}, \quad \therefore x_3 = -\frac{12k_1^2}{1 + 3k_1^2} - x_1$$

$$\text{又 } k_1 = \frac{y_1}{x_1 + 2}$$

代入①式得

$$\therefore x_3 = \frac{-7x_1 - 12}{4x_1 + 7}, \quad \therefore y_3 = \frac{y_1}{4x_1 + 7}$$

$$\therefore C\left(\frac{-7x_1 - 12}{4x_1 + 7}, \frac{y_1}{4x_1 + 7}\right), \quad \text{同理可得 } D\left(\frac{-7x_2 - 12}{4x_2 + 7}, \frac{y_2}{4x_2 + 7}\right)$$

$$\text{易知: } \overrightarrow{QC} = \left(x_3 + \frac{7}{4}, y_3 - \frac{1}{4}\right), \quad \overrightarrow{QD} = \left(x_4 + \frac{7}{4}, y_4 - \frac{1}{4}\right)$$

$$\because Q, C, D \text{ 三点共线}, \therefore \left(x_3 + \frac{7}{4}\right)\left(y_4 - \frac{1}{4}\right) - \left(x_4 + \frac{7}{4}\right)\left(y_3 - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\text{代入 } C, D \text{ 坐标化简得: } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 1, \quad \therefore k = 1$$