西城区高三统一测试

数　　学（理科）　　　2018.5

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至6页，共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷（选择题　共40分）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.若集合$A=\{x\mid 0<x<1\}$，$B=\{x\mid x^2-2x<0\}$，则下列结论中正确的是

A. $A\cap B=\varnothing$　　B. $A\cup B=\mathbf{R}$　　C. $A\subseteq B$　　D. $B\subseteq A$

【答案】C

【解析】集合$A=\{x\mid 0<x<1\}$，$B=\{x\mid 0<x<2\}$

所以$A\subseteq B$，故选C.

2.若复数z满足$(1-i)\cdot z=1$则$z=$

A. $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$　　D. $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$

【答案】A

【解析】$z=\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$

故选A.

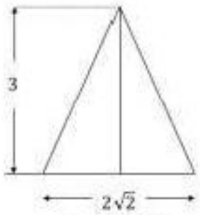
3.下列函数中，既是偶函数又在区间$(0,1)$上单调递减的是

A.$y=\frac{1}{x}$　　B.$y=x^2$　　C.$y=2^{|x|}$　　D.$y=\cos x$

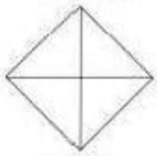
【答案】D

【解析】A.$y=\frac{1}{x}$是奇函数，B.$y=x^2$在$(0,1)$上单调递增，C.$y=2^{|x|}$在$(0,1)$上单调递增，D.$y=\cos x$是偶函数且在$(0,1)$上单调递减.故选D.

4.某正四棱锥的正（主）视图和俯视图如图所示，该正四棱锥的侧面积是



正（主）视图


俯视图

A.12

B.$4\sqrt{10}$

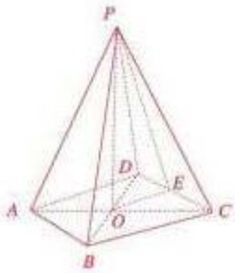
C.$12\sqrt{2}$

D.$8\sqrt{5}$

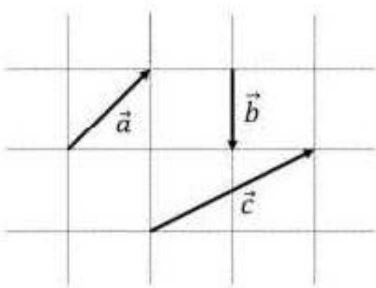
【答案】B

【解析】斜高$PE=\sqrt{10}$，底边长$CD=2$，

$4S=4\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{10}=4\sqrt{10}$.故选$B$.



5.向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$在正方形网格中的位置如图所示，若向量$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$共线，则实数$\lambda=$



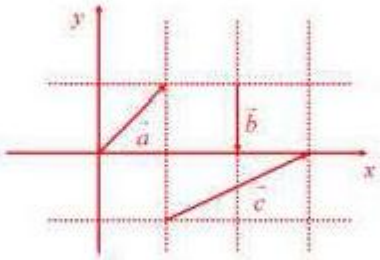
A.-2　　B.-1

C.1　　D.2

【答案】D

【解析】如图建立平面直角坐标系 xOy，$\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(0,-1)$，$\boldsymbol{c}=(2,1)$，

$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\lambda,\lambda-1)$.$\therefore\lambda=2(\lambda-1)$ 解得 $\lambda=2$.故选 D.



6.已知点 $A(0,0)$，$B(2,0)$.若椭圆 W：$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 上存在点 C，使得 $\triangle ABC$ 为等边三角形，则椭圆 W 的离心率是

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【解析】若 $\triangle ABC$ 等边三角形，则 $C(1,\pm\sqrt{3})$，又 C 在椭圆 W 上，所以

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{m}=1$ 解得 $m=6$，则 $a^2=6$，$c^2=4$，

$c=2$，$a=\sqrt{6}$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故选 C.

7.函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+a$，则“$a\geq 0$”是“$\exists x_0\in[-1,1]$，使 $f(x_0)\geq 0$”的

A.充分而不必要条件　　　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】充分性：

$f(x)=\sqrt{1-x^2}+a$

$\because a\geq 0$ $\therefore \exists x_0\in[-1,1]$ 使 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+a\geq 0$

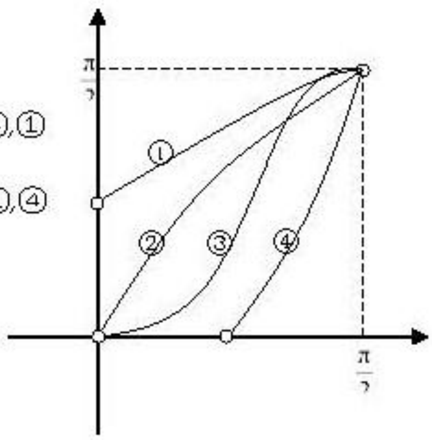
必要性：

令 $x_0=\frac{1}{2}\in[-1,1]$，$f(x_0)=\sqrt{1-{x_0}^2}+a=0$

则 $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，$a\geq 0$ 不成立

故选 A.

8.在直角坐标系 xOy 中，对于点 (x,y)，定义变换 σ：将点 (x,y) 变换为点 (a,b)，使得 $\begin{cases}x=\tan a,\\ y=\tan b,\end{cases}$ 其中 $a,b\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.这样变换 σ 就将坐标系 xOy 内的曲线变换为坐标系 aOb 内的曲线.则四个函数 $y_1=2x(x>0)$，$y_2=x^2(x>0)$，$y_3=e^x(x>0)$，$y_4=\ln x(x>1)$ 在坐标系 xOy 的图像，变换为坐标系 aOb 内的四条曲线（如图）依次是



A. ②,③,①,④　　　　B. ③,②,④,①

C. ②,③,④,①　　　　D. ③,②,①,④

【答案】A

【解析】图象过$(0,\frac{\pi}{4})$，即$a=0$，$b=\frac{\pi}{4}$，即$x>0$，$y=1$，所以①对应$y_3=e^x(x>0)$，同理④对应$y_4=\ln x(x>1)$；

$y_1=2x(x>0)$在xOy坐标系中过点$(\frac{1}{2},1)$.

在aOb坐标系中，$\frac{1}{2}=\tan a,1=\tan b$可知$a<b=\frac{\pi}{4}$，由图可知$y_1=2x(x>0)$对应图中②，故选$A$

第Ⅱ卷（非选择题　　共110分）

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

9.已知圆C的参数方程为$\begin{cases}x=2+\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数)，则圆$C$面积为______；圆心$C$到直线$l:3x-4y=0$的距离为______.

【答案】$\pi;\frac{6}{5}$

【解析】将圆C的参数方程化为一般方程:$(x-2)^2+y^2=1$,

圆心为$(2,0)$,半径为1.所以面积$S=\pi r^2=\pi$,

圆心到直线l的距离$d=\frac{|3\times2-4\times0|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{6}{5}$.

10. $(x^2+\frac{1}{x})^4$的展开式中x^2的系数是______.

【答案】6

【解析】$\because T_{r+1}=C_4^r(x^2)^{4-r}(\frac{1}{x})^r=C_4^rx^{8-3r}$,$\therefore 8-3r=2$时,$r=2$,$C_4^2=6$.

所以x^2的系数为6.

11.在$\triangle ABC$中，$a=3, b=2, \angle A=\frac{\pi}{3}$，则$\cos 2B=$______.

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$可得：$\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sin B}$，

解得:$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}, \cos 2B=1-2\sin^2 B=\frac{1}{3}$.

12.设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1, S_2>S_3$,则数列$\{a_n\}$的通项公式可以是______.

【答案】$a_n=-n+2$(符合题意即可)

【解析】$\because S_2>S_3, \therefore S_3-S_2<0$,即$a_3<0$.

当$a_3=-1$时,$d=\frac{a_3-a_1}{3-1}=-1, a_n=-n+2$.

13.设不等式组$\begin{cases} x\geq 1 \\ x+y\geq 3 \\ 2x+y\leq 5 \end{cases}$,表示的平面区域为$D$.若直线$ax-y=0$上存在区域$D$上的点,则实数$a$的取值范围是______.

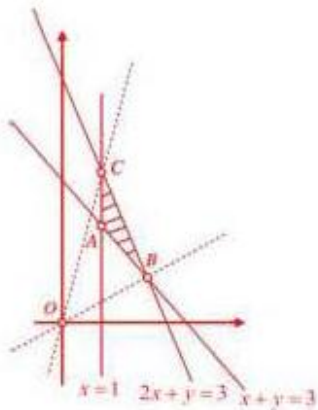
【答案】$[\frac{1}{2},3]$

【解析】由图可知:$A(1,2), B(2,1), C(1,3)$

所以$k_{OB}=\frac{1}{2}, k_{OC}=3$

若直线$ax-y=0$上存在区域D上的点,

则$\frac{1}{2}\leq a\leq 3$



14.地铁某换乘站设有编号为A,B,C,D,E的五个安全出口.若同时开放其中的两个安全出口,疏散1000名乘客所需的时间如下：

安全出口编号	A,B	B,C	C,D	D,E	A,E
疏散乘客时间（s）	120	220	160	140	200

则疏散乘客最快的一个安全出口的编号是______.

【答案】D

【解析】由相同出口的数据作差，可得：

$C-A=100$ ①

$B-D=60$ ②

$C-E=20$ ③

$A-D=60$ ④

$E-B=80$ ⑤

由①与③可得：$E-A=80$

由②与④可得：$B-A=0$

所以可得：$C>E>A=B>D$

故D口最快.

三、解答题:本大题共6小题,共80分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分13分)

已知函数$f(x)=(1+\tan x)\cdot\sin 2x$.

(Ⅰ)求$f(x)$的定义域;

(Ⅱ)若$\alpha\in(0,\pi)$,且$f(\alpha)=2$,求α的值.

【解析】

(Ⅰ) $f(x)=(1+\tan x)\cdot\sin 2x$

由$\tan x$的定义域可知:$f(x)$的定义域为$\{x\mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

(Ⅱ) $f(x)=(1+\tan x)\cdot\sin 2x=(1+\frac{\sin x}{\cos x})\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x$

$\because 2\sin^2 x=1-\cos 2x$

$\therefore f(x)=\sin 2x+1-\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+1$

$\therefore f(x)=2$时,$\sqrt{2}\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})+1=2$,即$\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore 2\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$或$2\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

又因为$\alpha\in(0,\pi)$

所以$\alpha=\frac{\pi}{4}$或$\alpha=\frac{\pi}{2}$(舍).

所以$\alpha=\frac{\pi}{4}$.

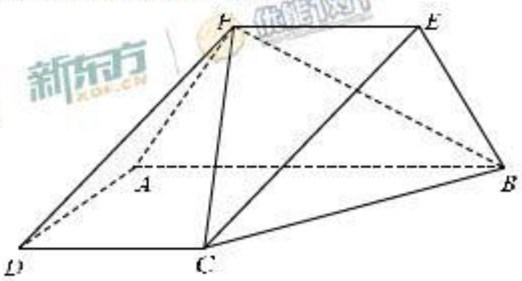
16.（本小题满分 14 分）

如图，梯形 $ABCD$ 所在的平面与等腰梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直，$AB // CD // EF$，$AB \perp AD$．$CD=DA=AF=FE=2$，$AB=4$

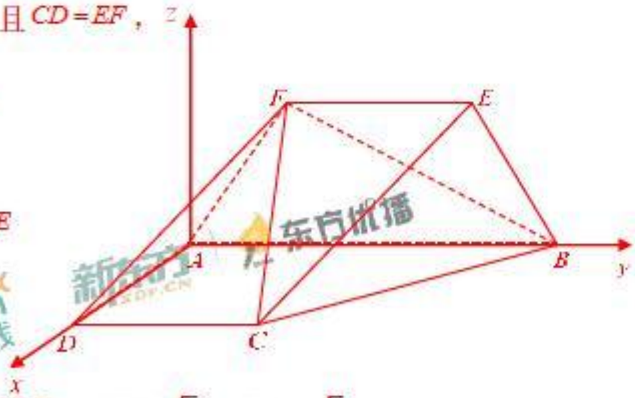
（Ⅰ）求证：$DF //$ 平面 BCE；

（Ⅱ）求二面角 $C-BF-A$ 的余弦值；

（Ⅲ）线段 CE 上是否存在点 G，使得 $AG \perp$ 平面 BCF？请说明理由．



【解析】解：（Ⅰ）因为 $CD // EF$，且 $CD=EF$，



所以 四边形 $CDFE$ 为平行四边形，

所以 $DF // CE$．

因为 $DF \not\subset$ 平面 BCE，$CE \subset$ 平面 BCE

所以 $DF //$ 平面 BCE．

（Ⅱ）如图建立空间直角坐标系．

由题意得，$A(0,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(2,2,0)$，$E(0,3,\sqrt{3})$，$F(0,1,\sqrt{3})$．

所以 $\overrightarrow{BC}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{BF}=(0,-3,\sqrt{3})$．

设平面 BCF 的法向量为 $n=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{BC}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{BF}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x-2y=0, \\ -3y+\sqrt{3}z=0. \end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=1$，$z=\sqrt{3}$，所以 $n=(1,1,\sqrt{3})$．

平面 ABF 的一个法向量为 $v=(1,0,0)$，

则 $\cos\langle n,v\rangle=\dfrac{n\cdot v}{|n||v|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

所以二面角 $C-BF-A$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

（Ⅲ）线段 CE 上不存在点 G，使得 $AG\perp$ 平面 BCF，理由如下：

假设线段 CE 上存在点 G，使得 $AG\perp$ 平面 BCF，

设 $\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CE}$，其中 $\lambda\in[0,1]$.

设 $G(x_2,\ y_2,\ z_2)$，则有 $(x_2-2,\ y_2-2,\ z_2)=(-2\lambda,\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

所以 $x_2=2-2\lambda$，$y_2=2+\lambda$，$z_2=\sqrt{3}\lambda$，从而 $G(2-2\lambda,\ 2+\lambda,\ \sqrt{3}\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{AG}=(2-2\lambda,2+\lambda,\sqrt{3}\lambda)$.

因为 $AG\perp$ 平面 BCF，所以 $AG/\!/n$.

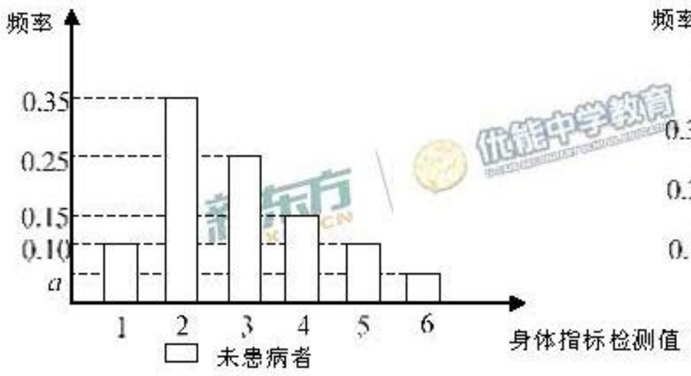
所以有 $\dfrac{2-2\lambda}{1}=\dfrac{2+\lambda}{1}=\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3}}$，

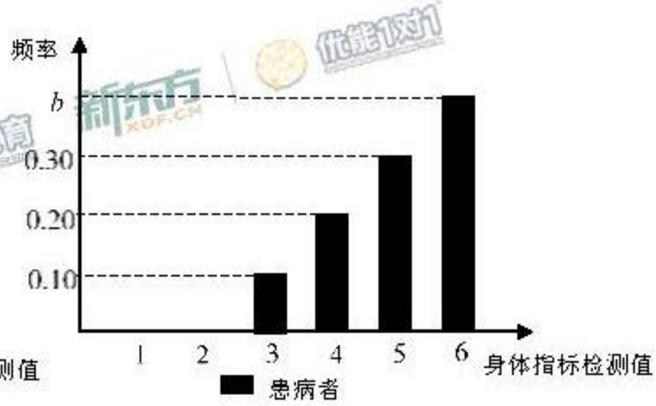
因为上述方程组无解，所以假设不成立.

所以线段 CE 上不存在点 G，使得 $AG\perp$ 平面 BCF.

17.（本小题满分 13 分）

在某地区,某项职业的从业者共约8.5万人,其中约3.4万人患有某种职业病.为了解这种职业病与某项身体指标(检测值为不超过6的正整数)间的关系,依据是否患有职业病,使用分层抽样的方法随机抽取了100名从业者,记录他们该项身体指标的检测值,整理得到如下统计图:





（Ⅰ）求样本中患病者的人数和图中a,b的值;

（Ⅱ）在该指标检测值为4的样本中随机选取2人,求这2人中有患病者的概率;

（Ⅲ）某研究机构提出,可以选取常数$X_0=n+0.5(n\in \mathbf{N}^*)$,若一名从业者该项身体指标检测值大于$X_0$,则判断其患有这种职业病;若检测值小于$X_0$,则判断其未患有这种职业病.从样本中随机选取一名职业者,按照这种方式判断其是否患有职业病.写出使得判断错误的概率最小的X_0的值及相应的概率(只需写出结论).

【解析】

（Ⅰ）患病人数为$100\times\dfrac{3.4}{8.5}=40$

由图象可知：

$a=1-(0.1+0.35+0.25+0.15+0.1)=0.05$

$b=1-(0.3+0.2+0.1)=0.4$

$\therefore a=0.05$，$b=0.4$

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知：患病人数为40,则未患病人数为60；

在未患病人中指标为4的人数为$60\times0.15=9$；

患病人群中指标为4的人数为$40\times0.2=8$.

设事件A=“选取的2人中有患病者”.

$$P(A)=\frac{C_9^1\cdot C_8^1+C_8^2}{C_{17}^2}=\frac{9\times8+\dfrac{8\times7}{2}}{\dfrac{17\times16}{2}}=\frac{200}{17\times16}=\frac{25}{34}$$

所以选取的2人中有患病者的概率为$\dfrac{25}{34}$.

（Ⅲ）$X_0=4.5$，概率为$\dfrac{21}{100}$.

18.（本小题满分14分）

已知直线$l:y=kx+1$与抛物线$C:y^2=4x$相切于点P

（Ⅰ）求直线l的方程及点P的坐标；

（Ⅱ）设Q在抛物线C上，A为PQ的中点，过A作y轴的垂线，分别交抛物线C和直线l于M，N.记$\triangle PMN$的面积为S_1，$\triangle QAM$的面积为S_2，证明：$S_1=S_2$.

【解析】（Ⅰ）由$\begin{cases}y=kx+1,\\ y^2=4x\end{cases}$得$k^2x^2+(2k-4)x+1=0$．①

依题意，有$k\neq0$，且$\Delta=(2k-4)^2-4k^2=0$．解得$k=1$．

所以直线l的方程为$y=x+1$． 将$k=1$代入①，解得$x=1$，

所以点P的坐标为$(1,2)$．

（Ⅱ）设$Q(m,n)$，则$n^2=4m$，所以$A(\frac{m+1}{2},\frac{n+2}{2})$．

依题意，将直线$y=\frac{n+2}{2}$分别代入抛物线C与直线l，

得$M(\frac{(n+2)^2}{16},\frac{n+2}{2})$，$N(\frac{n}{2},\frac{n+2}{2})$．

因为$|MN|=\left|\frac{(n+2)^2}{16}-\frac{n}{2}\right|=\left|\frac{n^2-4n+4}{16}\right|=\left|\frac{4m-4n+4}{16}\right|=\left|\frac{m-n+1}{4}\right|$，

$|AM|=\left|\frac{m+1}{2}-\frac{(n+2)^2}{16}\right|=\left|\frac{(8m+8)-(n^2+4n+4)}{16}\right|$

$=\left|\frac{(8m+8)-(4m+4n+4)}{16}\right|=\left|\frac{m-n+1}{4}\right|$，

所以$|AM|=|MN|$．

又A为PQ中点，所以P，Q 两点到直线AN的距离相等，

所以$S_1=S_2$．

19.（本小题满分 13 分）

已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-ax$，曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线经过点$(2,-1)$.

（Ⅰ）求实数a的值；

（Ⅱ）设$b>1$，求$f(x)$在区间$[\dfrac{1}{b},b]$上的最大值和最小值.

【解析】

解：（Ⅰ）$x>0$，$f(x)$的导函数为$f'(x)=\dfrac{1-\ln x-ax^2}{x^2}$，

所以$f'(1)=1-a$.

依题意，有$\dfrac{f(1)-(-1)}{1-2}=1-a$，

即$\dfrac{-a+1}{1-2}=1-a$，解得$a=1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$f'(x)=\dfrac{1-x^2-\ln x}{x^2}$.

当$0<x<1$时，$1-x^2>0,-\ln x>0$，所以$f'(x)>0$，故$f(x)$单调递增；

当$x>1$时，$1-x^2<0,-\ln x<0$，所以$f'(x)<0$，故$f(x)$单调递减.

所以$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，在区间$(1,+\infty)$上单调递减.

因为$0<\dfrac{1}{b}<1<b$，所以$f(x)$的最大值为$f(1)=-1$，

设$h(b)=f(b)-f(\dfrac{1}{b})=(b+\dfrac{1}{b})\ln b-b+\dfrac{1}{b}$，其中$b>1$，

则$h'(b)=(1-\dfrac{1}{b^2})\ln b>0$，故$h(b)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增.

所以$h(b)>h(1)=0$,即$f(b)>f(\dfrac{1}{b})$，

故$f(x)$的最小值为$f(\dfrac{1}{b})=-b\ln b-\dfrac{1}{b}$.

20.（本小题满分 13 分）

数列 $A_n: a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geq 2)$ 的各项均为整数，满足：$a_i \geq -1 (i = 1, 2, \cdots, n)$，且 $a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + a_3 \cdot 2^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n = 0$，其中 $a_1 \neq 0$.

（Ⅰ）若 $n = 3$，写出所有满足条件的数列 A_3；

（Ⅱ）求 a_1 的值；

（Ⅲ）证明：$a_1 + a_2 + \cdots + a_n > 0$.

【解析】解：（Ⅰ）满足条件的数列 A_3 为：$-1, -1, 6$；$-1, 0, 4$；$-1, 1, 2$；$-1, 2, 0$.

（Ⅱ）$a_1 = -1$.

否则，假设 $a_1 \neq -1$，因为 $a_1 \neq 0$，所以 $a_1 \geq 1$. 又 $a_2, a_3, \cdots, a_n \geq -1$，因此有

$a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + a_3 \cdot 2^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n$

$\geq 2^{n-1} + (-1) \cdot 2^{n-2} + (-1) \cdot 2^{n-3} + \cdots + (-1) \cdot 2 + (-1)$

$= 2^{n-1} - 2^{n-2} - 2^{n-3} - \cdots - 2 - 1 = 1$，

这与 $a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + a_3 \cdot 2^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n = 0$ 矛盾！

所以 $a_1 = -1$.

（Ⅲ）先证明如下结论：

$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$，必有 $a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + a_k \cdot 2^{n-k} \leq 0$.

否则，令 $a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + a_k \cdot 2^{n-k} > 0$，

注意左式是 2^{n-k} 的整数倍，因此 $a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + a_k \cdot 2^{n-k} \geq 2^{n-k}$.

所以有：

$a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + a_3 \cdot 2^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n$

$\geq 2^{n-k} + (-1) \cdot 2^{n-k-1} + (-1) \cdot 2^{n-k-2} + \cdots + (-1) \cdot 2 + (-1)$

$=2^{n-k}-2^{n-k-1}-2^{n-k-2}-\cdots-2-1$

$=1$，

这与$a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2+a_n=0$矛盾！

所以$a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+\cdots+a_k\cdot 2^{n-k}\le 0$，

因此有：

$$\begin{aligned}&a_1<0,\\&a_1\cdot 2+a_2\le 0,\\&a_1\cdot 4+a_2\cdot 2+a_3\le 0,\\&\cdots\\&a_1\cdot 2^{k-1}+a_2\cdot 2^{k-2}+\cdots+a_{k-1}\cdot 2+a_k\le 0,\\&\cdots\\&a_1\cdot 2^{n-2}+a_2\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-2}\cdot 2+a_{n-1}\le 0.\end{aligned}$$

将上述$n-1$个不等式相加得$a_1\cdot(2^{n-1}-1)+a_2\cdot(2^{n-2}-1)+\cdots+a_{n-1}\cdot(2-1)<0$，①

又$a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2+a_n=0$ ， ②

两式相减即得$a_1+a_2+\cdots+a_n>0$．