2018 年北京市朝阳区高三二模数学（理）考试逐题解析

第 I 卷　　　　（选择题　共 40 分）

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x\mid \log_2 x>1\}, B=\{x\mid x\geq 1\}$,则 $A\cup B=$

（A）$(1,2]$　（B）$(1,+\infty)$　（C）$(1,2)$　（D）$[1,+\infty)$

【答案】D

【考点】本题考查对数不等式与集合运算.

【解析】由 $\log_2 x>1$,得 $x>2$.

所以 $A\cup B=[1,+\infty)$

故选 D

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=1, AC=\sqrt{2}, \angle C=\frac{\pi}{6}$,则 $\angle B=$

（A）$\frac{\pi}{4}$　（B）$\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$

（C）$\frac{3\pi}{4}$　（D）$\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

【答案】D

【考点】本题考查正弦定理的应用.

【解析】由正弦定理 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$ 即 $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin B}$

得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\because \angle B\in(0,\pi), AC>AB$

$\therefore \angle B>\angle C$

$\therefore \angle B\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5}{6}\pi)$

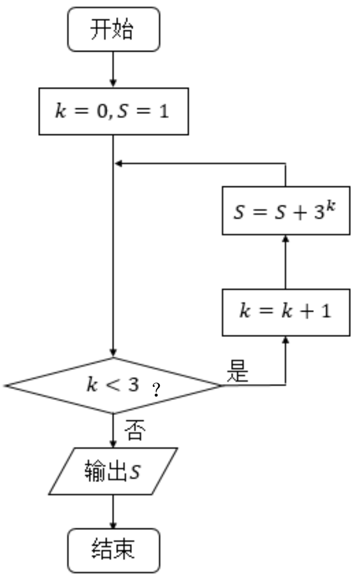
$\therefore \angle B=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$.

故选 D

3. 执行如图所示的程序框图,则输出的 S 值为

（A）10　　（B）13

（C）40　　（D）121



(第3题图)

【答案】C

【考点】本题考查程序框图

【解析】

k	0	1	2	3	$k<3$ 否
S	1	$1+3^1=4$	$4+3^2=13$	$13+3^3=40$	输出 $S=40$

故选 C

4. 在极坐标系中,直线 $l:\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$ 与圆 $C:\rho=2\cos\theta$ 的位置关系为

（A）相交且过圆心　　（B）相交但不过圆心

（C）相切　　（D）相离

【答案】B

【考点】本题考查极坐标方程、直线与圆的位置关系

【解析】直线 $l:\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$ 与圆 $C:\rho=2\cos\theta$

化为直角坐标方程分别为:$l:x+y-2=0$,

圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心 $(1,0)$，半径为1.

圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|1-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1)$.

所以直线与圆相交但不过圆心.

故选 B

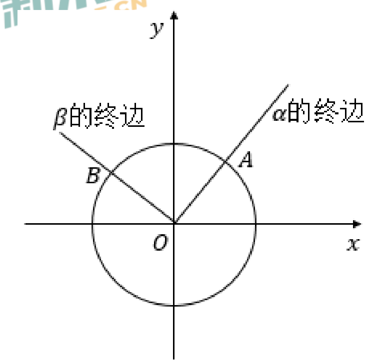
5. 如图,角 α,β 均以 Ox 为始边,终边与单位圆 O 分别交于点 A,B，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$

（A）$\sin(\alpha-\beta)$

（B）$\sin(\alpha+\beta)$

（C）$\cos(\alpha-\beta)$

（D）$\cos(\alpha+\beta)$



（第5题图）

【答案】C

【考点】本题考查平面向量的数量积

【解析】$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos<\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}>$

$=1\times1\times\cos(\beta-\alpha)$

$=\cos(\beta-\alpha)=\cos(\alpha-\beta)$

故选 C.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\geq a,\\ x^2, x<a,\end{cases}$ 则"$a\leq0$"是"函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增"的

（A）充分而不必要条件

（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件

（D）既不充分也不必要条件

【答案】A

【考点】本题考查逻辑用语和函数单调性

【解析】证明充分性:

当 $a\leq0$ 时,当 $x\in[0,+\infty)$ 时， $f(x)=2^x$,

由指数函数的性质可知, $y=2^x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

即充分性成立

证明必要性:

令 $2^x = x^2, (x \geq 0)$，解得 $x_1 = 2, x_2 = 4$

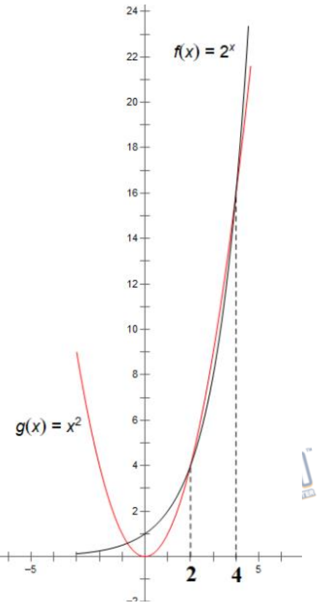
因为函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,

解得 $a \leq 2$ 或 $a \geq 4$,

所以当 a 的值不一定小于等于 0

故必要性不成立.

故选 A



7. 某校象棋社团组织中国象棋比赛,采用单循环赛制,即要求每个参赛选手必须且只须和其他选手各比赛一场,胜者得2分,负者得0分,平局两人各得1分.若冠军获得者得分比其他人都多,且获胜场次比其他人都少,则本次比赛的参赛人数至少为

（A） 4　　　　（B） 5

（C） 6　　　　（D） 7

【答案】C

【考点】本题考查逻辑推理

【解析】由题意得,冠军得分比其他参赛人员高,且获胜的场次比别人少,所以冠军与别人匹配场次中,平局至少为3场.

A 选项：若最少4个人,当冠军3次平局时,得3分,其他人至少1胜1平局,最低得3分,A 项不成立.

B 选项：若最少5个人,当冠军 1 负3平局时,得3分,其他人至少1胜1平局,最低得3分,不成立；当冠军1胜3平局时,得5分,其他人至少2胜1平局,

最低得5分,不成立.综上,B 项不成立.

C 选项：若最少6个人,当冠军 2 负3平局时,得3分,其他人至少1胜1平局,最低得3分,不成立；当冠军1胜4平局时,得6分,其他人至少2胜1平局,最低得5分,成立.综上,C 项可成立.

D 选项：$7>6$,故不为最少人数,不成立

故选 C

8. 若三个非零且互不相等的实数 x_1,x_2,x_3 成等差数列且满足 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{x_3}$，则称 x_1,x_2,x_3 成一个“β 等差数列”. 已知集合 $M=\{x||x|\le 100,x\in\mathbf{Z}\}$，则由 M 中的三个元素组成的所有数列中,“β 等差数列”的个数为

（A）25　　（B）50　　（C）51　　（D）100

【答案】B

【考点】本题考查等差数列的综合运用.

【解析】设等差数列 x_1,x_2,x_3 的公差为 d，

由 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{x_3}$ 得 $\frac{1}{x_2-d}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{x_2+d}$，

整理得 $d(3x_2-d)=0$,

$\because d\ne 0$, $\therefore d=3x_2$,

$\therefore x_1=-2x_2,x_3=4x_2$,这三个数为 $-2x_2,x_2,4x_2$,

$\because x_1,x_2,x_3\in[-100,0)\cup(0,100]$, $x_1,x_2,x_3\in\mathbf{Z}$

$\therefore -25\le x_2\le 25$,有 50 个（除去0）

故选 B

第II卷 （非选择题　共 110 分）

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

9. 计算 $\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2}=$______.

【答案】 $-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

【考点】本题考查复数的运算.

【解析】 $\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2}=\dfrac{1}{1+2\mathrm{i}-1}=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}^2}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

10. 双曲线 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$ 的离心率是______;该双曲线的两条渐近线的夹角是______.

【答案】 $\sqrt{2},\dfrac{\pi}{2}$

【考点】本题考查双曲线的离心率和渐近线.

【解析】依题意有 $\dfrac{x^2}{\lambda}-\dfrac{y^2}{\lambda}=1(\lambda\neq 0)$

所以 $a^2=b^2=|\lambda|$

所以 $c^2=a^2+b^2=2|\lambda|$,

所以 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\sqrt{2}$

渐近线方程 $y=\pm x$

所以夹角为$\dfrac{\pi}{2}$

11. 若$(x^3-\dfrac{1}{x})^n$展开式的二项式系数之和为8,则$n=$______;其展开式中含$\dfrac{1}{x^3}$项的系数为______.（用数字作答）

【答案】$3,-1$

【考点】本题考查二项式定理.

【解析】由二项式系数和公式可得,$2^n=8$,所以$n=3$,

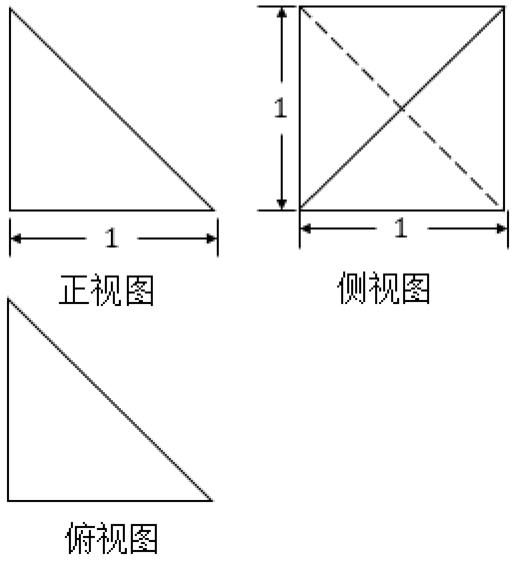
所以$(x^3-\dfrac{1}{x})^3$的第$(r+1)$项为$T_{r+1}=C_3^r(x^3)^{3-r}(-\dfrac{1}{x})^r=C_3^r(-1)^r x^{9-4r}$

当$9-4r=-3$,即$r=3$时,

$T_4=C_3^3(-1)^3x^{-3}=-x^3$

所以系数为-1.

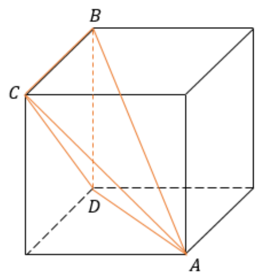
12. 已知某三棱锥的三视图如图所示,则该三棱锥的底面和三个侧面中,直角三角形的个数是______.



（第12题图）

【答案】3

【考点】本题考查三视图.



【解析】由图可知,三棱锥 $A-BCD$ 的底面和三个侧面中直角三角形有 $\triangle ABC,\triangle BCD,\triangle ABD$,所以有三个直角三角形.

13. 已知不等式组 $\begin{cases} y\ge 0 \\ |x|+y\le 2 \\ y+1\ge k(x+1) \end{cases}$ 在平面直角坐标系 xOy 中所表示的平面区域为 D , D 的面积为 S ,则下面结论:

①当 $k>0$ 时, D 为三角形; ②当 $k<0$ 时, D 为四边形;

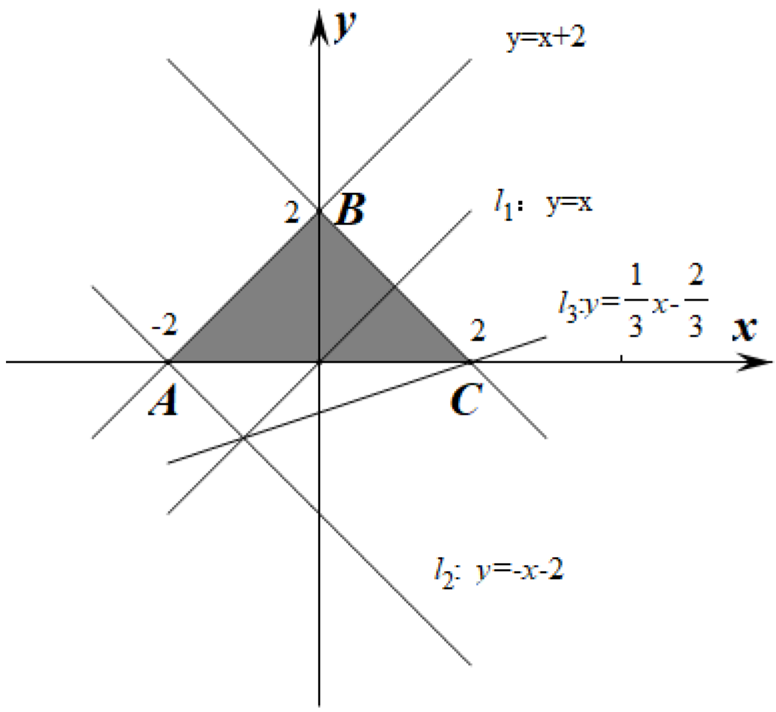
③当 $k=\dfrac{1}{3}$ 时, $S=4$; ④当 $0<k\le\dfrac{1}{3}$ 时, S 为定值.

其中正确的序号是_______.

【答案】③④

【考点】本题考查线性规划.

【解析】由函数图象可知,



设直线l的方程为$y+1=k(x+1)$,即$y=kx+k-1$.

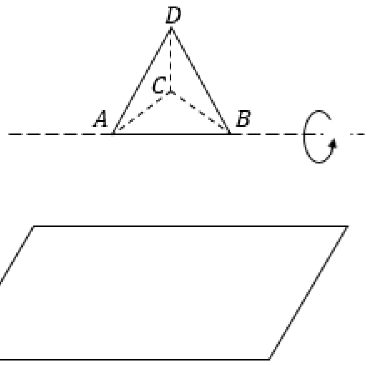
当$k=1$时,$l_1:y+1=x+1$,即$y=x$,此时D为一个四边形,即①不成立;

当$k=-1$时,$l_2:y+1=-(x+1)$,即$y=-x-2$,此时D为一个三角形,即②不成立;

当$k=\frac{1}{3}$时,$l_3:y+1=\frac{1}{3}(x+1)$,即$y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$,此时可行域$D$为$\triangle ABC$,所以$S=4$,③成立;

当$0<k\le\frac{1}{3}$时,可行域D为$\triangle ABC$,所以面积为定值,即$S=4$,④成立.

14. 如图,已知四面体.的棱 $AB//$ 平面 α,且 $AB=\sqrt{2}$,其余的棱长均为1.四面体 $ABCD$ 以 AB 所在的直线为轴旋转 x 弧度,且始终在水平放置的平面 α 上方.如果将四面体 $ABCD$ 在平面 α 内正投影面积看成关于 x 的函数,记为 $S(x)$,则函数 $S(x)$ 的最小值为______;$S(x)$ 的最小正周期为______.



(第14题图)

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{4}$;π

【考点】本题考查立体几何的综合应用.

【解析】从侧面看,如图1只需考虑△BCD 绕着 B 点旋转时,C,D 两点在直线 l 上的投影.

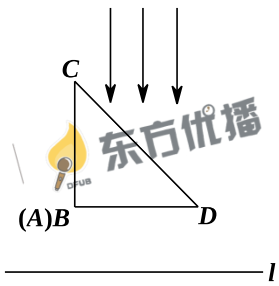


图1

① 当旋转 $\frac{\pi}{4}$ 时,投影最短为 $\frac{1}{2}$,

$$\therefore S_{\min}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

② 随着旋转,

$$S=\begin{cases}\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, 0\le\theta<\frac{\pi}{4}\\ \frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta, \frac{\pi}{4}\le\theta<\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{3\pi}{4}-\theta), \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\end{cases}$$

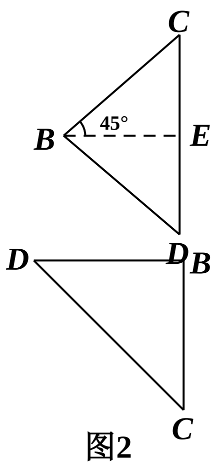


图2

当$\triangle BCD$第一次旋转到图 2 位置时，C,D两点在直线l的投影又回到了图1，

$\therefore$最小正周期为π.

三、解答题（共 6 小题,共 80 分,解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程）

15.（本小题满分 13 分）

已知函数$f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)-a$的图象经过点$(\frac{\pi}{2},1)$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）求a的值,并求函数$f(x)$的单调递增区间;

（Ⅱ）若当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时,不等式$f(x)\geq m$恒成立,求实数m的取值范围.

【解析】

（Ⅰ） $f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)-a$

$$=2\sin^2 x+2\sin x\cos x-a$$

$$=1-\cos 2x+\sin 2x-a$$

$$=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+1-a$$

$\because f(x)$经过点$(\frac{\pi}{2},1)$

$\therefore \sqrt{2}\sin(\pi-\frac{\pi}{4})+1-a=1, a=1$

因为 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi],k\in\mathbf{Z}$

所以 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$

所以 $-\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{3\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$

（II）由（I）知 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，

因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

所以 $2x-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$

当 $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$，即 $x=0$ 时，$f(x)_{\min}=-1$

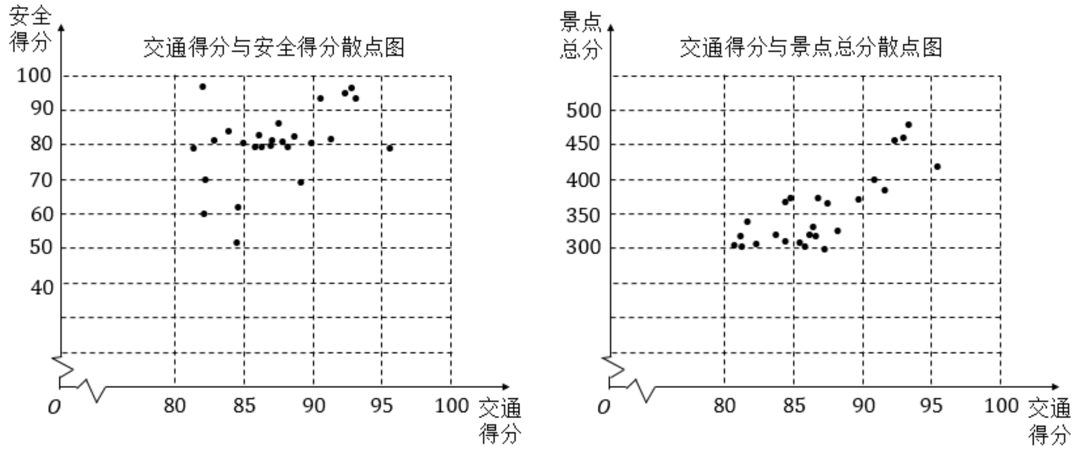
因为 $f(x)\ge m$ 恒成立即 $m\le f(x)_{\min}$

所以 $m\in(-\infty,-1]$

16.（本小题满分 13 分）

某市旅游管理部门为提升该市 26 个旅游景点的服务质量,对该市 26 个旅游景点的交通、安全、环保、卫生、管理五项指标进行评分.每项评分最低分 0 分,最高分 100 分.每个景点总分为这五项得分

之和,根据考核评分结果,绘制交通得分与安全得分散点图、交通得分与景点总分散点图如下:



请根据图中所提供的信息，完成下列问题：

（Ⅰ）若从交通得分排名前 5 名的景点中任取 1 个,求其安全得分大于 90 分的概率;

（Ⅱ）若从景点总分排名前 6 名的景点中任取 3 个,记安全得分不大于 90 分的景点个数为ξ,求随机变量ξ的分布列和数学期望;

（Ⅲ）记该市 26 个景点的交通平均得分为$\overline{x_1}$,安全平均得分为$\overline{x_2}$,写出$\overline{x_1}$与$\overline{x_2}$的大小关系.（只写出结果）

【解析】

（Ⅰ）由图可知,交通得分前 5 名的景点中安全得分大于 90 分的景点有 3 个.故从交通得分前 5 名的景点中任取 1 个,其安全得分大于 90 分的概率为$\dfrac{3}{5}$

（II）由图可知,景点总分前 6 名的安全得分不大于 90 分的景点有 2 个.设从景点总分前 6 名的景点中任取 3 个,安全得分不大于 90 分的个数为ξ,则ξ的取值为 0,1,2

所以$P(\xi=0)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$

$P(\xi=1)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$

$P(\xi=2)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$

故ξ的分布列为

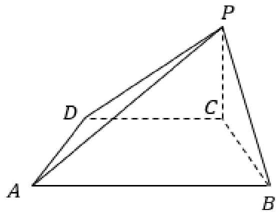
ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

所以$E\xi=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$

（III）$\overline{x_1}>\overline{x_2}$

17.（本小题满分 14 分）

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$. $\triangle PBC$ 是等腰三角形,且 $PB=PC=3$.在梯形 $ABCD$ 中, $AB//DC$, $AD\perp DC$, $AB=5$, $AD=4$, $DC=3$.



（Ⅰ）求证: $AB//$ 平面 PDC ;

（Ⅱ）求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值;

（Ⅲ）在线段 AP 上是否存在点 H ,使得 $BH\perp$ 平面 ADP ？请说明理由.

证明:（Ⅰ）因为 $AB//DC$

又因为 $AB\not\subset$ 平面 PDC , $DC\subset$ 平面 PDC

所以 $AB//$ 平面 PDC

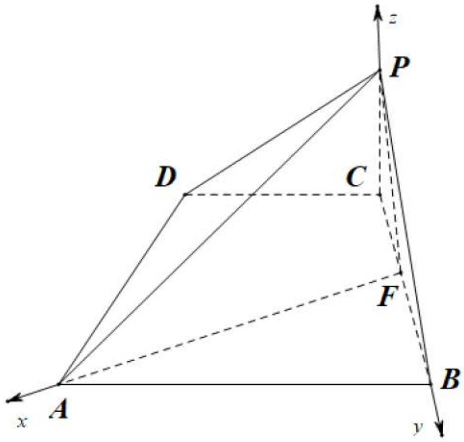
（Ⅱ）取 BC 中点 F ，在 $\triangle PBC$ 中, 因为 $PB=PC$ ，所以 $PF\perp BC$

又易知 $AC=AB=5$ ，所以 $AF\perp BC$

又因为平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$,且平面 $PBC\cap$ 平面 $ABCD=BC$,

所以 $PF\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PF\perp AF$.

以 F 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $F-xyz$



在梯形 $ABCD$ 中，因为 $AB//DC, AD\perp DC, AD=4, DC=3, AB=5$

所以 $BC=2\sqrt{5}, AF=2\sqrt{5}$

又因为 $PB=3$，所以 $PF=2$

于是有 $P(0,0,2),A(2\sqrt{5},0,0),B(0,\sqrt{5},0),C(0,-\sqrt{5},0)$

所以 $\overrightarrow{FA}=(2\sqrt{5},0,0),\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{5},\sqrt{5},0),\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{5},-2)$

因为 $AF\perp$ 平面 PBC，所以 $\overrightarrow{FA}=(2\sqrt{5},0,0)$ 是平面 PBC 的一个法向量

设平面 PBA 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\sqrt{5}x+\sqrt{5}y=0\\ \sqrt{5}y-2z=0\end{cases}\text{所以}\begin{cases}y=2x\\ \sqrt{5}y=2z\end{cases}$$

令 $y=2$，则 $\boldsymbol{m}=(1,2,\sqrt{5})$

所以 $\cos<\overrightarrow{FA},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

由图可知，二面角 $A-PB-C$ 为锐角

所以二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

（III）因为 $AB=5,DC=3$，且 $\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{5},\sqrt{5},0)$，所以 $\overrightarrow{CD}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(-\dfrac{4\sqrt{5}}{5},-\dfrac{8\sqrt{5}}{5},0)$

设平面 ADP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}x_1-\dfrac{8\sqrt{5}}{5}y_1=0\\ -2\sqrt{5}x_1+2z_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2y_1\\ \sqrt{5}x_1=z_1\end{cases}$$

令 $x_1=2$，则 $\boldsymbol{n}=(2,-1,2\sqrt{5})$

假设线段 AP 上存在点 H，使得 $BH\perp$ 平面 ADP，且设 $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AP}(\lambda\in[0,1])$

所以 $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AP}=(-2\sqrt{5}\lambda,0,2\lambda)$

所以 $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}=(2\sqrt{5}-2\sqrt{5}\lambda,-\sqrt{5},2\lambda)$

因为 $BH\perp$ 平面 ADP, 所以 $\overrightarrow{BH}//\boldsymbol{n}$

所以 $\dfrac{2\sqrt{5}-2\sqrt{5}\lambda}{2}=\dfrac{-\sqrt{5}}{-1}=\dfrac{2\lambda}{2\sqrt{5}}$，显然 λ 不存在

所以假设不成立, 故线段 AP 上不存在点 H 使得 $BH\perp$ 平面 ADP

18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=xe^x+ax^2+2ax(a\in\mathbf{R})$.

（I）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $3x+y=0$,求 a 的值;

（II）当 $-\dfrac{1}{2}\le a<0$ 时,讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

【解析】 $f'(x)=(x+1)(e^x+2a)$

（I）因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $3x+y=0$.

所以 $f(0)=0$, $f'(0)=-3$.由 $e^0+2a=-3$ 得 $a=-2$.

（II）当 $-\dfrac{1}{2}\le a<0$ 时,令 $f'(x)=(x+1)(e^x+2a)=0$

得 $x=-1$ 或 $x=\ln(-2a)$.

① 当 $\ln(-2a)<-1$ 即 $a\in(-\dfrac{1}{2e},0)$ 时,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,\ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a),-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+

$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $(\ln(-2a),-1)$ 上单调递减，在 $(-\infty,\ln(-2a))$ 和 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f(\ln(-2a))=a\ln^2(-2a)<0$, $f(0)=0$,

所以函数 $f(x)$ 有一个零点.

② 当 $\ln(-2a)=-1$,即 $a=-\dfrac{1}{2e}$ 时,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(-1)=-a-\dfrac{1}{e}$	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f(0)=0$,所以函数 $f(x)$ 有一个零点.

③ 当 $-1<\ln(-2a)<0$,即 $a\in(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2e})$ 时,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a),+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,\ln(-2a))$ 上单调递减，在 $(-\infty,-1)$ 和 $(\ln(-2a),+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f(-2)=-2e^2+4a-4a=-2e^2<0$, $f(-1)=-a-\dfrac{1}{e}$,

$f(\ln(-2a)) = a\ln^2(-2a) < 0, f(0) = 0$.

所以当 $a \in (-\frac{1}{e}, -\frac{1}{2e})$ 时,此时 $f(-1) = -a - \frac{1}{e} < 0$,函数 $f(x)$ 有一个零点;

当 $a = -\frac{1}{e}$ 时,此时 $f(-1) = 0$,函数 $f(x)$ 有两个零点;

当 $a \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{e})$ 时,此时 $f(-1) = -a - \frac{1}{e} < 0$,函数 $f(x)$ 有三个零点.

④ 当 $\ln(-2a) = 0$ 即 $a = -\frac{1}{2}$ 时,显然函数 $f(x)$ 有两个零点.

综上所述,(1) $a \in (-\frac{1}{e}, 0)$ 时,函数 $f(x)$ 有一个零点;

(2) $a \in \{-\frac{1}{e}, -\frac{1}{2}\}$ 时,函数 $f(x)$ 有两个零点;

(3) $a \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{e})$ 时,函数 $f(x)$ 有三个零点.

19.(本小题满分 14 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2x$.

(Ⅰ)写出抛物线 C 的准线方程,并求抛物线 C 的焦点到准线的距离;

(Ⅱ)过点 $(2,0)$ 且斜率存在的直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 A, B,且点 B 关于 x 轴的对称点为 D,直线 AD 与 x 轴交于点 M.

(i)求点 M 的坐标;

(ii)求 $\triangle OAM$ 与 $\triangle OAB$ 面积之和的最小值.

【解析】

（Ⅰ）由题可得$2P=2,P=1$,所以准线方程为$x=-\dfrac{1}{2}$,

抛物线C的焦点到准线的距离为1.

（Ⅱ）

（ⅰ）解：令 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 则 $D(x_2,-y_2)$ 且 令 $y_1>0$, 令

$l_{AB}:x=my+2$

$$\begin{cases}x=my+2\\ y^2=2x\end{cases}\Rightarrow y^2-2my-4=0$$

所以$y_1+y_2=2m,y_1\cdot y_2=-4$

则直线AD方程为$y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$

$$y-y_1=\frac{y_1+y_2}{m(y_1-y_2)}(x-x_1)$$

$$y-y_1=\frac{2}{(y_1-y_2)}(x-\frac{1}{2}y_1^{\ 2})$$

当$y=0$时,$(y_1-y_2)\cdot(-y_1)=2x-y_1^{\ 2}$

$(y_1-y_2)\cdot(-y_1)+y_1^{\ 2}=2x$

$y_1y_2=2x$, $x=-2$

所以$M(-2,0)$

（ii）解: $S_{\triangle OAM}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot y_1$

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot y_1+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|y_2|$$

则 $S_{\triangle OAM}+S_{\triangle OAB}=y_1+y_1+|y_2|$

$$=2y_1+|y_2|$$

$$=2y_1+|\frac{-4}{y_1}|$$

$$=2y_1+\frac{4}{y_1}\geq 2\sqrt{2y_1\cdot\frac{4}{y_1}}=4\sqrt{2}$$

当且仅当 $2y_1=\frac{4}{y_1}$ 时，即 $y_1=\sqrt{2}$ 等号成立

20.（本小题满分 13 分）

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：存在 $a_p=a_q(p,q\in\mathbf{N}^*,p>q)$，并且只要 $a_p=a_q$ 就有 $a_{p+i}=ta_{q+i}$（t 为常数，$i=1,2,3,\cdots$），则称 $\{a_n\}$ 具有性质 T.

（Ⅰ）若 $\{a_n\}$ 具有性质 T，且 $t=3,a_1=4,a_2=5,a_4=1,a_5=5,$ $a_7+a_8+a_9=36$，求 a_3；

（Ⅱ）若无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2^n+b(b\in\mathbf{R})$，证明存在无穷多个 b 的不同取值，使得数列 $\{a_n\}$ 有性质 T；

（Ⅲ）设 $\{b_n\}$ 是一个无穷数列，数列 $\{a_n\}$ 中存在 $a_p=a_q(p,q\in\mathbf{N}^*,p>q)$，且 $a_{n+1}=b_n\cos a_n(n\in\mathbf{N}^*)$. 求证：“$\{b_n\}$ 为常数列”是“对任意正整数 a_1，$\{a_n\}$ 都具有性质 T”的充分不必要条件.

【解析】

（Ⅰ）因为 $\{a_n\}$ 具有性质 T，且 $a_2=a_5=5,$

所以 $a_6=3a_3,a_7=3a_4=3,a_8=3a_5=15,a_9=3a_6=9a_3,$

由 $a_7+a_8+a_9=36$,得 $3+15+9a_3=36$,所以 $a_3=2$,经检验符合题意.

（Ⅱ）因为无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=2^n+b(b\in\mathbf{R})$,

所以 $a_1=2+b$, 当 $n\geq 2$ 时, $a_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$,

若存在 $a_p=a_q(p>q)$, 则 $q=1$,

取 $b=2^{p-1}-2$($p\in\mathbf{N}$, 且 $p\geq 2$, p 为常数),

则 $a_p=2^{p-1}=a_q$,对 $t=2^{p-1}$,有 $a_{p+i}=2^{p+i-1}=2^{p-1}a_{1+i}=ta_{1+i}(i=1,2,3\cdots)$

所以数列 $\{a_n\}$ 有性质 T,且 b 的不同取值有无穷多个.

（Ⅲ）证明:当 $\{b_n\}$ 为常数列时,有 $b_n=m$(常数), $a_{n+1}=m\cos a_n(n\in\mathbf{N}^*)$

对任意正整数 a_1,因为存在 $a_p=a_q$,则由 $m\cos a_p=m\cos a_q$,必有 $a_{p+1}=a_{q+1}$,

进而有 $a_{p+i}=a_{q+i}(i=1,2,3,\cdots)$,这时 $t=1$, $a_{p+i}=ta_{q+i}(i=1,2,3,\cdots)$

所以 $\{a_n\}$ 都具有性质 T.

所以,"$\{b_n\}$ 为常数列"是"对任意正整数 a_1, $\{a_n\}$ 都具有性质 T"的充分条件.

取 $b_n=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}(k\in\mathbf{N}^*)$,对任意正整数 a_1,

由 $a_n=b_{n-1}\cos a_{n-1}(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*)$,

得 $a_2=b_1\cos a_1=\dfrac{\pi}{2}\cos a_2$,因为 a_1 为正整数,所以 $a_2\neq 0$,且 $a_1\neq a_2$.

$a_3=b_2\cos a_2=0, a_4=b_3\cos a_3=\dfrac{\pi}{2},\cdots$

当$n\ge 3$时,$a_n=\begin{cases}0, & n=2k+1,\\ \dfrac{\pi}{2}, & n=2k+2,\end{cases}(k\in\mathbf{N}^*)$

对任意 p,q,则 p,q 同为奇数或同为偶数,

①若 p,q 同为偶数,则 $a_{p+i}=a_{q+i}(i=1,2,3,\cdots)$ 成立;

②若 p,q 同为奇数,则 $a_{p+i}=a_{q+i}(i=1,2,3,\cdots)$ 成立;

所以若对于任意 p,q 满足 $a_p=a_q$,则取 $t=1$, $a_{p+i}=1\times a_{q+i}$,

故$\{a_n\}$具有性质 T,但$\{b_n\}$不为常数列,

所以"$\{b_n\}$为常数列"是"对任意正整数 a_1, $\{a_n\}$ 都具有性质 T"的不必要条件.

证毕.