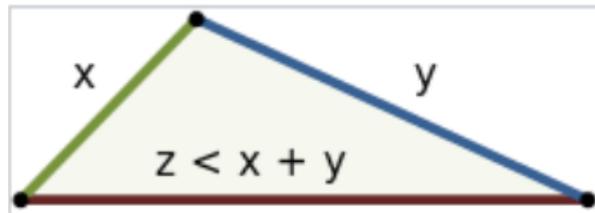


新 SAT 数学题目中的重要公式和句型

-- 北京新东方学校 SAT 项目 张志峰

1. Triangle inequality / 三角形不等式

三角形的两边之和，大于第三边



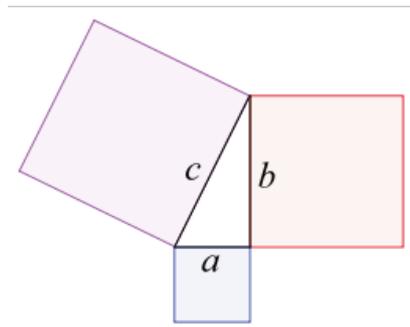
2. 补角 (supplementary angles) 与 余角 (complementary angles)

如果两个角互为补角 (supplementary angles), 那么它们的和是 180 度

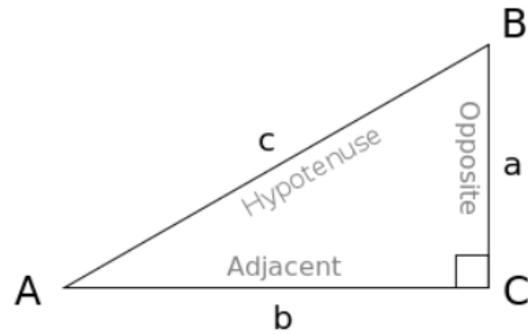
如果两个角互为余角 (complementary angles), 那么它们的和是 90 度

3. 勾股定理 (Pythagorean Theorem)

$$a^2 + b^2 = c^2;$$



4. Trigonometry



- **Sine** function (sin), defined as the ratio of the side opposite the angle to the **hypotenuse**.

$$\sin A = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}} = \frac{a}{c}.$$

- **Cosine** function (cos), defined as the ratio of the **adjacent** leg to the hypotenuse.

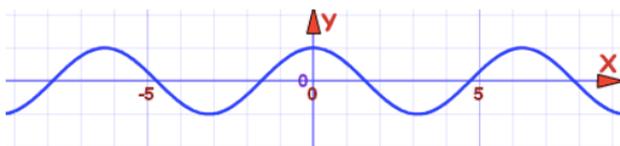
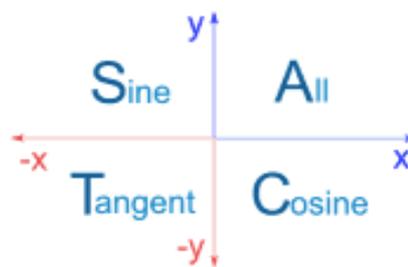
$$\cos A = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}} = \frac{b}{c}.$$

- **Tangent** function (tan), defined as the ratio of the opposite leg to the adjacent leg.

$$\tan A = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} * \frac{c}{b} = \frac{a}{c} / \frac{b}{c} = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

sine, cosine, tangent 的正负, 如图所示:



余弦函数 (Cosine function: $f(x) = \cos(x)$)



正弦函数 (Sine function: $f(x) = \sin(x)$)

5. 多边形的内角和

如果一个多边形 (polygon) 的边的个数是 n , 它的内角和是: $180^{\circ}(n-2)$

6. 多边形的外角和

$$360^{\circ}$$

7. 正多边形的外角和性质公式

如果一个正多边形 (regular polygon) 的边的个数是 n , 外角 (exterior angle) 是 A , 那么:

$$n \cdot A = 360^{\circ}$$

8. 如何判断两条边平行?

- 1) 同位角 (corresponding angles) 相等, 两条边平行
- 2) 内错角 (alternate angles) 相等, 两条边平行
- 3) 同旁内角 (interior angles on the same side) 互补, 两条边平行

9. 柱体的体积计算公式

柱体分两种，圆柱 (cylinder) 和棱柱 (prism), $V = \text{底面积} \cdot \text{高}$

10. 锥体的体积计算公式

锥体分两种，圆锥 (cone) 和棱锥 (pyramid), $V = \frac{1}{3} \cdot \text{底面积} \cdot \text{高}$

11. 扇形圆心角，弧长，扇形面积的万能公式

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{C_{arc}}{C_{circle}} = \frac{S_{sector}}{S_{circle}}$$

注意，扇形的角 α 与圆的周角，扇形对应的弧长与圆的周长，扇形的面积与圆的面积的比值是一个常数

12. 圆形的解析式

In an x - y Cartesian coordinate system, the circle with centre coordinates (a, b) and radius r is the set of all points (x, y) such that

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

13. 通过圆形的解析式求圆的半径

如果圆形的解析式是标准式: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, 那么圆的半径是 r

如果圆形的解析式是展开式: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 那么圆的半径是:

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

14. 倍数关系

twice as many A as B: $A = 2B$

half as many A as B: $B = 2A$

three times as many A as B: $A = 3B$

15. 齿轮问题

齿轮问题的常见考点是: $\frac{A \text{ 的齿轮个数}}{B \text{ 的齿轮个数}} = \frac{B \text{ 的转速}}{A \text{ 的转速}}$

16. complex number

Addition and subtraction [\[edit \]](#)

Complex numbers are **added** by separately adding the real and imaginary parts of the summands. That is to say:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Similarly, **subtraction** is defined by

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Multiplication and division [\[edit \]](#)

The multiplication of two complex numbers is defined by the following formula:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

In particular, the **square** of the imaginary unit is -1 :

$$i^2 = i \times i = -1.$$

Division

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i.$$

Exponentiation

$$\begin{array}{cccc} i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = -i, \\ i^4 = 1, & i^5 = i, & i^6 = -1, & i^7 = -i, \end{array}$$

Formula: $i^{4n} = 1$ $i^{4n+1} = i$

$$i^{4n+2} = -1 \quad i^{4n+3} = -i$$

17. 绝对值不等式

$$|x| \leq a \longrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| \geq a \longrightarrow x \leq -a \text{ or } x \geq a$$

18. Translation (图像平移)

点的平移:

点 (a, b) 向右平移 2 个单位: $(a+2, b)$

点 (a, b) 向左平移 2 个单位: $(a-2, b)$

点 (a, b) 向上平移 2 个单位: $(a, b+2)$

点 (a, b) 向下平移 2 个单位: $(a, b-2)$

函数图像的平移:

函数 $y=f(x)$ 向右平移 2 个单位: $f(x-2)$

函数 $y=f(x)$ 向左平移 2 个单位: $f(x+2)$

函数 $y=f(x)$ 向上平移 2 个单位: $f(x)+2$

函数 $y=f(x)$ 向下平移 2 个单位: $f(x)-2$

19. 图像对称 (Reflection)

点的对称:

点 (a, b) 关于 x -axis 对称: $(a, -b)$

点 (a, b) 关于 y -axis 对称: $(-a, b)$

点 (a, b) 关于 origin / x -axis 和 y -axis 对称: $(-a, -b)$

点 (a, b) 关于 $y = x$ 对称: (b, a)

函数图像的对称:

函数 $y = f(x)$ 关于 x -axis 对称: $-f(x)$

函数 $y = f(x)$ 关于 y -axis 对称: $f(-x)$

函数 $y = f(x)$ 关于 origin 对称: $-f(-x)$

20. stretch (拉伸) 和 compress (压缩)

$$y=f(x)$$

stretch vertically by a factor of 2: $y=2f(x)$

compress vertically by a factor of 2: $\frac{1}{2}f(x)$

stretch horizontally by a factor of 2: $f\left(\frac{1}{2}x\right)$

compress horizontally by a factor of 2: $f(2x)$

21. 直线斜率求解方法

1) 通过两点坐标确定斜率

如果 A 点的坐标是 (x_a, y_a) , B 点的坐标 (x_b, y_b)

那么, 过 A 点和 B 点的直线的斜率是: $\frac{y_b-y_a}{x_b-x_a}$

2) 两条直线垂直 (perpendicular), 那么它们的斜率的乘积 (product) = -1

3) 两条直线平行 (parallel), 那么它们的斜率相等

22. 直线方程的求解方法

1) slope – intercept

如果一条直线的 slope 是 k , y-intercept 是 b , 那么直线方程是: $y=kx+b$

2) slope – point

如果一条直线的 slope 是 k , 经过点 (a, b) , 那么直线方程是: $y-b=k(x-a)$

23. 二次函数的 standard form

standard form: $y=ax^2+bx+c$

1) $a > 0$, 图像开口方向: upward

$a < 0$, 图像开口方向: downward

2) a 的绝对值变大, 图像的开口的宽度: 变窄

a 的绝对值变小, 图像的开口的宽度: 变宽

3) c : 是二次函数的常数项, 也是图像的 y-intercept

4) 通过二次函数的 standard form 求图像的对称轴: $x = -\frac{b}{2a}$

5) 通过二次函数的 standard form 求图像的顶点坐标: $\left[-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} \right]$

6) 求根公式: $r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

24. 二次函数的 factored form

factored form: $y=a(x-r_1)(x-r_2)$

1) $a > 0$, 图像开口方向: upward

$a < 0$, 图像开口方向: downward

2) a 的绝对值变大, 图像的开口的宽度: 变窄

a 的绝对值变小, 图像的开口的宽度: 变宽

3) r_1 和 r_2 是二次函数的 x-intercept

4) 通过二次函数的 factored form 求图像的对称轴: $\frac{r_1 + r_2}{2}$

5) 通过二次函数的 factored form 求图像的顶点坐标: $\left(\frac{r_1 + r_2}{2}, f\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\right)$

25. 二次函数的 vertex form

vertex form: $y=a(x-p)^2+q$

1) $a > 0$, 图像开口方向: upward

$a < 0$, 图像开口方向: downward

2) 顶点坐标: (p, q)

26. 二次函数的判别式 (discriminant)

$$y = ax^2 + bx + c$$

- 1) $b^2 - 4ac > 0$ 时, 抛物线与 x 轴有两个交点
- 2) $b^2 - 4ac = 0$ 时, 抛物线与 x 轴有 1 个交点
- 3) $b^2 - 4ac < 0$ 时, 抛物线与 x 轴没有交点

27. 韦达定理 (Vieta's Theorem)

Vieta's formulas applied to quadratic and cubic polynomial:

For the **second degree polynomial** (quadratic) $P(x) = ax^2 + bx + c$, roots x_1, x_2 of the equation $P(x) = 0$ satisfy

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

The first of these equations can be used to find the minimum (or maximum) of P . See **second order polynomial**.

For the **cubic polynomial** $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, roots x_1, x_2, x_3 of the equation $P(x) = 0$ satisfy

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}, \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}.$$

28. 多项式 (polynomial)

注意, 多项式 (polynomial) 包括单项式, 二项式, 以及三项式

- 1) 等号两边, 常数项相等, x 同次 (degree) 的系数 (coefficient) 相等
- 2) 多项式函数的常数项 (constant) 是函数图像与 y 轴的截距 (y-intercept)

29. 多项式函数的余数定理 (Polynomial Remainder Theorem)

多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$, 那么, 所得的余数 = $f(a)$

30. 指数运算规则

$$1) \quad a^b \cdot c^b = (ac)^b \qquad \frac{a^b}{c^b} = \left(\frac{a}{c}\right)^b$$

$$2) \quad a^b \cdot a^c = a^{b+c} \qquad \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

$$3) \quad (a^b)^c = a^{b \cdot c}$$