朝阳区 2016—2017 学年度第一学期期末教学统一检测

高三数学（文）

2017.1

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 （选择题　共 40 分）

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$ 集合 $A=\{x|x<1\}$, $B=\{x|x-2<0\}$,则 $(\complement_U A)\cap B=$

（A）$\{x|x>2\}$　　（B）$\{x|1<x\le 2\}$

（C）$\{x|1\le x<2\}$　　（D）$\{x|x\le 2\}$

【答案】本题选 C.

【解析】本题考查集合的运算.$\because A=\{x\,|\,x<1\}$, $\therefore \complement_U A=\{x\,|\,x\ge 1\}$;

又 $\because B=\{x\,|\,x<2\}$, $\therefore (\complement_U A)\cap B=\{x\,|\,1\le x<2\}$,从而答案为 C.

2. 复数 $\dfrac{2}{1+i}=$

（A）$2-i$　　（B）$2-2i$　　（C）$1+i$　　（D）$1-i$

【答案】本题选 D.

【解析】本题考查复数.$\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2(1-i)}{1-i^2}=\dfrac{2(1-i)}{2}=1-i$,答案选 D.

3. 设非零实数 a,b 满足 $a<b$,则下列不等式中一定成立的是

（A）$a+b>0$　　（B）$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　（C）$ab<b^2$　　（D）$a^3-b^3<0$

【答案】本题选 D.

【解析】本题考查不等式.当 $a<0$ 且 $b<0$ 时，选项 A 不成立；当 $a<0$ 且 $b>0$ 时，选项 B 不成立；当 $a<0$ 且 $b<0$ 时，选项 C 不成立.故选 D.

4. 已知平面向量$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，则$\vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$的夹角为

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{3}$　　（C）$\frac{2\pi}{3}$　　（D）$\frac{5\pi}{6}$

【答案】本题选 B.

【解析】本题考查向量.$\vec{a}+\vec{b}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=1$，故$\cos<\vec{a},\vec{a}+\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}+\vec{b}\right|}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$，$\therefore$

$<\vec{a},\vec{a}+\vec{b}>=\frac{\pi}{3}$，从而答案选 B.

5. 设$a>0$，且$a\neq 1$，则“函数$y=a^x$在$\mathbf{R}$上是减函数”是“函数$y=(2-a)x^3$在$\mathbf{R}$上是增函数”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】本题选 A.

【解析】本题考查简易逻辑.若命题p为“若函数$y=a^x$在$\mathbf{R}$上是减函数”为真命题，则$0<a<1$.

若命题q为“若函数$y=(2-a)x^3$在$\mathbf{R}$上是增函数”为真命题，则$2-a>0$即$a<2$，

又$a>0$且$a\neq 1$，即$0<a<2$且$a\neq 1$.故p能推出q，q推不出p，则p是q的充分而不必要条件.

6. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左、右焦点分别是$F_1,F_2$，$M$是双曲线上的一点，且$\left|MF_1\right|=\sqrt{3}$，$\left|MF_2\right|=1$，$\angle MF_1F_2=30°$，则该双曲线的离心率是

（A）$\sqrt{3}-1$　　（B）$\sqrt{3}+1$

（C）$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　（D）$\sqrt{3}+1$或$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

【答案】本题选 D.

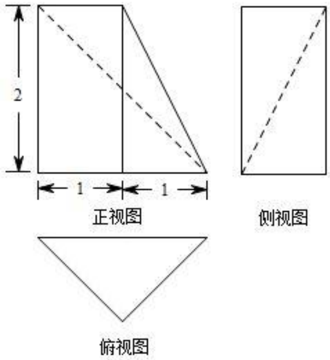
【解析】本题考查双曲线.$\because\left|MF_1\right|=\sqrt{3}$，$\left|MF_2\right|=1$，$\therefore 2a=\sqrt{3}-1$，$a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

在$\triangle MF_1F_2$中，$\left|F_1F_2\right|=2c$，由余弦定理得$\cos\angle MF_1F_2=\frac{\left|MF_1\right|^2+\left|F_1F_2\right|^2-\left|MF_2\right|^2}{2\left|MF_1\right|\cdot\left|F_1F_2\right|}$

$\therefore c=\frac{1}{2}$或$c=1$,从而$e=\sqrt{3}+1$或$e=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

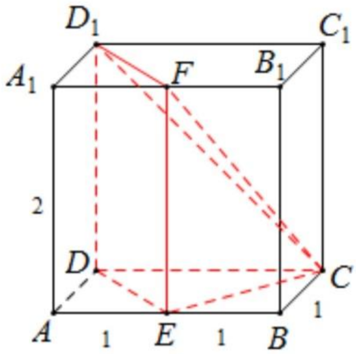
7. 某四棱锥的三视图如图所示,其俯视图为等腰直角三角形,则该四棱锥的体积为

（A）$\frac{\sqrt{2}}{3}$ （B）$\frac{2}{3}$ （C）$\frac{4}{3}$ （D）$\sqrt{2}$



【答案】本题选 C

【解析】本题考查三视图.易知四棱锥$C-DD_1FE$ 如右图所示，故该四棱锥的体积为$\frac{4}{3}$.



8. 某校高三（1）班 32 名学生参加跳远和掷实心球两项测试.跳远和掷实心球两项测试成绩合格的人数分别为 26 人和 23 人,这两项成绩均不合格的有 3 人,则这两项成绩均合格的人数是

（A）23 （B）20 （C）21 （D）19

【答案】本题选 B .

【解析】本题考查容斥原理. 设跳远合格的学生构成集合A,掷实心球合格的学生构成集合B. $Card\left(A\cup B\right)=Card\left(A\right)+Card\left(B\right)-Card\left(A\cap B\right)$

$32-3=26+23-Card\left(A\cap B\right)$

$Card\left(A\cap B\right)=20$.

第二部分 （非选择题　共 110 分）

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9.　已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$a_1=2$,$S_2=a_3$,则$a_2=$ ______,$S_{10}=$ ______.

【答案】$a_2=4$,$S_{10}=110$

【解析】本题考查数列.$\because$ $\{a_n\}$为等差数列,且$a_1=2$,$S_2=a_3$,即$a_1+a_2=a_3$,$a_1+a_1+d=a_1+2d$,

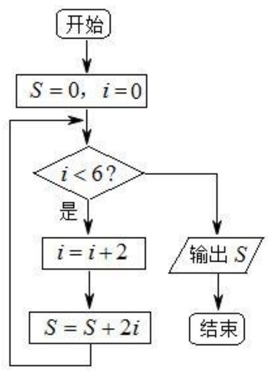
$\therefore$ $a_1=d=2$,$\therefore$ $a_2=a_1+d=4$,$S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times 9}{2}d=10\times 2+45\times 2=110$.

10.　圆$C:x^2+y^2+2x-2y-2=0$的圆心到直线$3x+4y+14=0$的距离是______.

【答案】3.

【解析】本题考查直线与圆.圆心坐标为$(-1,1)$,直线方程为$3x+4y+14=0$,所以圆心到直线的距离为$d=\dfrac{|-3+4+14|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{15}{5}=3$.

11.　执行如图所示的程序框图,则输出的S的结果为______.



【答案】30.

【解析】本题考查程序框图.输入$i=1,S=0$开始循环.

第一次：$i=3$　$S=0+6=6$　　　第二次：$i=5$　$S=6+2\times 5=16$

第三次：$i=7$　$S=16+2\times 7=30$　退出循环，输出$S=30$.

12. 在! ABC中,已知$\angle B=45°$,$AC=\sqrt{2}BC$,则$\angle C=$ ______.

【答案】105°.

【解析】本题考查解三角形.在! ABC中,已知$\angle B=45^\circ$,设$AC=b$　$BC=a$

$\therefore$ $b=\sqrt{2}a$,$\therefore$ $\sin B=\sqrt{2}\sin A$,$\therefore$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\sin A$, $\therefore$ $\sin A=\dfrac{1}{2}$ $(0<A<180°)$

$\therefore$ $\angle A=30^\circ$或150°(舍).$\therefore$ $\angle C=180^\circ-30^\circ-45^\circ=105^\circ$.

13. 设 D 为不等式组 $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y\le 0 \\ x+3y\le 3 \end{cases}$ 表示的平面区域,对于区域 D 内除原点外的任一点 $A(x,y)$ ，

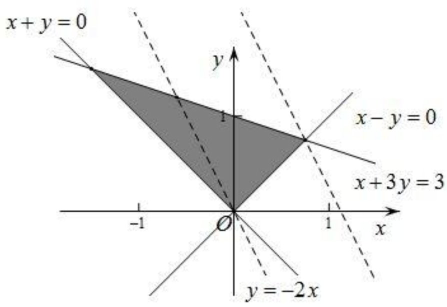
则 $2x+y$ 的最大值是______, $\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的取值范围是______.

【答案】$\dfrac{9}{4}$, $\left[-\sqrt{2},0\right]$.

【解析】本题考查线性规划,

由 $\begin{cases} x-y=0 \\ x+3y=3 \end{cases}$,解得交点坐标为 $(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4})$ 易知此时 $z=2x+y$ 取得最大值,

$\therefore z_{\max}=2\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}$.



当 $xy\ne 0$ 时，$\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2=\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2}$

$=1-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=1-\dfrac{2}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$

$\therefore$ 设 $t=\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{y}{x}\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, $\therefore t+\dfrac{1}{t}\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

$\therefore \dfrac{1}{t+\frac{1}{t}}\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$， $\dfrac{2}{t+\frac{1}{t}}\in[-1,0)\cup(0,1]$

$\therefore 1-\dfrac{2}{t+\frac{1}{t}}\in[0,1)\cup(1,2]$ 又 $\because$ $x-y\le 0$ $\therefore$ $\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\in\left[-\sqrt{2},-1\right)\cup(-1,0]$.

当 $x=0$ 且 $y\ne 0$ 时，$\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-1$

当 $y=0$ 时，不符合题意，综上所述：$\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\in\left[-\sqrt{2},0\right]$.

14. 有甲、乙、丙、丁四位歌手参加比赛,其中只有一位获奖.有人走访了四位歌手,甲说:“乙或丙获奖”;乙说:“甲、丙都未获奖”;丙说:“丁获奖”;丁说:“丙说的不对”.若四位歌手中只有一个人说的是真话,则获奖的歌手是 ______.

【答案】甲

【解析】本题考查推理与证明.

若丙说的是真话,则丁获奖,这时乙说的也是真话,矛盾;

若丙说的是假话,则丁说的是真话,甲和乙说的都是假话.由甲说的是假话,乙和丙均未获奖;由乙说的是假话,甲和丙中至少一人获奖.

从而甲获奖.

三、解答题(共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

15. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期;

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$上的最大值和最小值.

【解析】

（Ⅰ） 因为 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$

$$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$$

$$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6}).$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为π.

（Ⅱ）因为$-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{4}$,所以$-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{2\pi}{3}$.

当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即$x=\frac{\pi}{6}$时， $f(x)$ 取得最大值2；

当$2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$,即$x=-\frac{\pi}{6}$时, $f(x)$ 取得最小值-1.

16.（本小题满分 13 分）

已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数,且 $a_2=4, a_3+a_4=24$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（Ⅱ）若数列$\{b_n\}$满足 $b_1=3, b_2=6$, 且$\{b_n-a_n\}$是等差数列,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

【解析】

（Ⅰ）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，依题意 $q>0$.

因为$\begin{cases} a_1q=4, \\ a_1q^2+a_1q^3=24, \end{cases}$

两式相除得 ：$q^2+q-6=0$，

解得 $q=2$， $q=-3$(舍去).

所以 $a_1=\dfrac{a_2}{q}=2$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^n$.

（Ⅱ）由已知可得$b_1-a_1=3-2=1$，$b_2-a_2=6-4=2$，

因为$\left\{b_n-a_n\right\}$为等差数列，

所以数列$\left\{b_n-a_n\right\}$是首项为1，公差为$d=1$的等差数列.

所以 $b_n-a_n=1+(n-1)=n$.

则$b_n=n+2^n$.

因此数列$\{b_n\}$的前n项和：

$$T_n=1+2+2+2^2+3+2^3+\cdots+n+2^n$$

$$=(1+2+3+\cdots+n)+(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)$$

$$=\frac{n^2+n}{2}+2^{n+1}-2.$$

17. （本小题满分 14 分）

甲、乙两位学生参加数学文化知识竞赛培训.在培训期间,他们参加的 5 次测试成绩记录如下：

甲：82　82 79 95 87

乙：95　75 80 90 85

（Ⅰ）用茎叶图表示这两组数据;

（Ⅱ）从甲、乙两人的这 5 次成绩中各随机抽取一个,求甲的成绩比乙的成绩高的概率;

（Ⅲ）现要从甲、乙两位同学中选派一人参加正式比赛,从统计学的角度考虑,你认为选派哪位同学参加合适？并说明理由.

【解析】

（Ⅰ）作出茎叶图如下；

甲		乙
9	7	5
7 2 2	8	0 5
5	9	0 5

（Ⅱ）记甲被抽到的成绩为 x，乙被抽到成绩为 y，用数对 (x,y) 表示基本事件：

$$
\begin{aligned}
&(82,95),(82,75),(82,80),(82,90),(82,85),\\
&(82,95),(82,75),(82,80),(82,90),(82,85),\\
&(79,95),(79,75),(79,80),(79,90),(79,85),\\
&(95,95),(95,75),(95,80),(95,90),(95,85),\\
&(87,95),(87,75),(87,80),(87,90),(87,85),
\end{aligned}
$$

基本事件总数 $n=25$.

设“甲的成绩比乙高”为事件 A,事件 A 包含的基本事件：

$$
\begin{aligned}
&(82,75),(82,80),(82,75),(82,80),(79,75),(95,75),\\
&(95,80),(95,90),(95,85),(87,75),(87,80),(87,85),
\end{aligned}
$$

事件 A 包含的基本事件数 $m=12$．所以，$P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{12}{25}$.

（III）派甲参赛比较合适，理由如下：

$$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}(70\times1+80\times3+90\times1+9+2+2+7+5)=85,$$

$$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{5}(70\times1+80\times2+90\times2+5+0+5+0+5)=85$$

$$S_{甲}^2=\frac{1}{5}[(79-85)^2+(82-85)^2+(82-85)^2+(87-85)^2+(95-85)^2]=31.6$$

$$S_{乙}^2=\frac{1}{5}[(75-85)^2+(80-85)^2+(80-85)^2+(90-85)^2+(95-85)^2]=50$$

因为 $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙},s_{甲}^2<s_{乙}^2$，

所以，甲的成绩较稳定，派甲参赛比较合适.

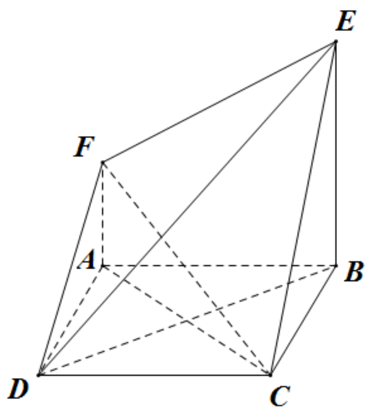
18.（本小题满分 14 分）

如图,四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形,平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，$AF\,//\,BE$，$AB\perp BE, AB=BE=2, AF=1$.

（Ⅰ）求证：$AC\perp$ 平面 BDE；

（Ⅱ）求证：$AC\,//$ 平面 DEF；

（III）求三棱锥 $C-DEF$ 的体积.



【解析】

（Ⅰ）因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，

平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$，且 $AB\perp BE$，所以 $BE\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BE\perp AC$.

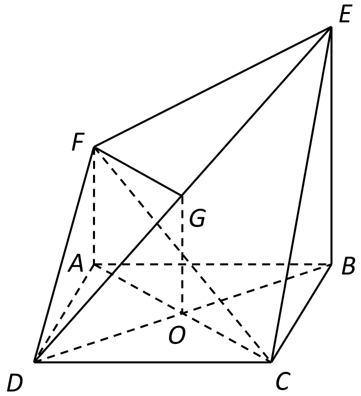
又因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AC\perp BD$.

因为 $BD\cap BE=B$，所以 $AC\perp$ 平面 BDE.

（Ⅱ）设 $AC\bigcap BD=O$，

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，

所以 O 为 BD 中点.



设 G 为 DE 的中点，连结 OG,FG，

则 $OG//BE$，且 $OG=\dfrac{1}{2}BE$.

由已知 $AF//BE$，且 $AF=\dfrac{1}{2}BE$，

则 $AF//OG,$ 且 $AF=OG.$

所以四边形 $AOGF$ 为平行四边形.所以 $AO//FG$，即 $AC//FG$.

因为 $AC\not\subset$ 平面 DEF， $FG\subset$ 平面 DEF， 所以 $AC//$ 平面 DEF.

（Ⅲ）由（Ⅰ）可知 $BE\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $AF//BE$，所以 $AF\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $AF\perp AB,AF\perp AD$.

又因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AB\perp AD$，

所以 $AD\perp$ 平面 $ABEF$.

由（Ⅱ）可知， $AC//$ 平面 DEF，

所以，点 C 到平面 DEF 的距离等于 A 点到平面 DEF 的距离，

所以 $V_{C-DEF}=V_{A-DEF}$. 因为 $AB=AD=2AF=2$.

所以 $V_{C-DEF}=V_{A-DEF}=V_{D-AEF}=\dfrac{1}{3}\times S_{\Delta AEF}\times AD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times AF\times AB\times AD$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 2\times 2=\frac{2}{3}.$$

故三棱锥 $C-DEF$ 的体积为 $\dfrac{2}{3}$.

19. （本小题满分 13 分）

在平面直角坐标系 xOy 中,动点 P 与两定点 $A(-2,0),B(2,0)$ 连线的斜率乘积为 $-\frac{1}{2}$,记点 P 的轨迹为曲线 C.

（Ⅰ）求曲线 C 的方程;

（Ⅱ）若曲线 C 上两点 M,N 满足 $OM // PA, ON // PB$.

求证：! OMN 的面积为定值.

【解析】

解:（Ⅰ）设 $P(x,y)$，则 $\frac{y}{x+2}\times\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{2}$，

整理得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\ (x\neq\pm2)$.

（Ⅱ）依题直线 OM,ON 的斜率乘积为 $-\frac{1}{2}$.

当直线 MN 的斜率不存在时，直线 OM,ON 的斜率为 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，设直线 OM 的方程

是 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，由 $\begin{cases} x^2+2y^2=4, \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x, \end{cases}$ 得 $x=\pm\sqrt{2}$， $y=\pm1$.取 $M(\sqrt{2},1)$，则 $N(\sqrt{2},-1)$.

所以 ΔOMN 的面积为 $\sqrt{2}$.

当直线 MN 的斜率存在时，设方程为 $y=kx+m$.

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+2y^2-4=0 \end{cases}$ 得，$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-4=0$.

因为 M， N 在椭圆 C 上，

所以 $\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-4)>0$，解得 $4k^2-m^2+2>0$.

设$M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}$， $x_1x_2=\dfrac{2m^2-4}{2k^2+1}$；

所以$|MN|=\sqrt{(k^2+1)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(k^2+1)[(\dfrac{4km}{2k^2+1})^2-4\times\dfrac{2m^2-4}{2k^2+1}]}$

$=2\sqrt{\dfrac{2(k^2+1)(4k^2-m^2+2)}{(2k^2+1)^2}}$.

设点O到直线MN的距离为d，则$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$.

所以ΔOMN的面积为$S_{\Delta OMN}=\dfrac{1}{2}\times d\times|MN|=\sqrt{\dfrac{2m^2(4k^2-m^2+2)}{(2k^2+1)^2}}$ ……①.

因为$OM//PA$, $ON//PB$，直线OM , ON的斜率乘积为$-\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{1}{2}$.

所以$\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{x_1x_2}=\dfrac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}=\dfrac{m^2-4k^2}{2m^2-4}$.

由$\dfrac{m^2-4k^2}{2m^2-4}=-\dfrac{1}{2}$，得$2k^2+1=m^2$ ……②.

由①②，得$S_{\Delta OMN}=\dfrac{1}{2}\times d\times|MN|=\sqrt{\dfrac{2m^2(2m^2-m^2)}{(m^2)^2}}=\sqrt{2}$.

20. （本小题满分 14 分）

设函数$f(x)=(x-1)e^x+ax^2, a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当$a=1$时,求曲线$y=f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线方程;

（Ⅱ）若函数$f(x)$有两个零点,试求a的取值范围;

（Ⅲ）设函数$g(x)=\ln x+x-e^x+1$,当$a=0$时,证明$f(x)-g(x)\geq 0$.

【解析】

（Ⅰ）当$a=1$时，函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x+x^2$，

因为 $f'(x)=x\mathrm{e}^x+2x$，所以 $f'(1)=\mathrm{e}+2$.又 $f(1)=1$,

则所求的切线方程为$y-1=(\mathrm{e}+2)(x-1)$.化简得：$y=(\mathrm{e}+2)x-\mathrm{e}-1$.

（Ⅱ）因为 $f'(x)=x(\mathrm{e}^x+2a)$

①当$a=0$时，函数 $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$只有一个零点；

②当$a>0$，函数当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$；

函数当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增.

又 $f(0)=-1$，$f(1)=a$，

因为$x<0$，所以$x-1<0,\mathrm{e}^x<1$，所以$\mathrm{e}^x(x-1)>x-1$，所以 $f(x)>ax^2+x-1$.

取 $x_0=\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}$，显然$x_0<0$且 $f(x_0)>0$.

所以 $f(0)f(1)<0$，$f(x_0)f(0)<0$.

由零点存在性定理及函数的单调性知，函数有两个零点.

③当$a<0$时，由 $f'(x)=x(\mathrm{e}^x+2a)=0$，得$x=0$，或$x=\ln(-2a)$.

若$a\ge-\dfrac{1}{2}$，则$\ln(-2a)\le0$.

故当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$在单调递增，所以函数 $f(x)$在

$(0,+\infty)$至多有一个零点.

又当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $f(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上没有零点.

所以函数 $f(x)$ 不存在两个零点.

若 $a<-\dfrac{1}{2}$，则 $\ln(-2a)>0$.

当 $(\ln(-2a),+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 至多有一个零点.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $f'(x)>0$；当 $x\in(0,\ln(-2a))$ 时， $f'(x)<0$；

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单增， $(0,\ln(-2a))$ 上单调递减，所以函数 $f(x)$ 在

$(-\infty,\ln(-2a))$ 上的最大值为 $f(0)=-1<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-2a))$ 上没有零点.

所以 $f(x)$ 不存在两个零点.

综上， a 的取值范围是 $(0,+\infty)$.

（III）证明:当 $a=0$ 时， $f(x)-g(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-\ln x-x-1$.

设 $h(x)=x\mathrm{e}^x-\ln x-x-1$，其定义域为 $(0,+\infty)$，则证明 $h(x)>0$ 即可.

因为 $h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-\dfrac{x+1}{x}$，所以 $h'(0.1)<0$， $h'(1)>0$.

又因为 $h''(x)=(x+2)\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x^2}>0$，所以函数 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $h'(x)=0$ 有唯一的实根 $x_0\in(0,1)$，且 $\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$.

当 $0<x<x_0$ 时， $h'(x)<0$；当 $x>x_0$ 时， $h'(x)>0$.所以函数 $h(x)$ 的最小值为 $h(x_0)$.

所以 $h(x)\ge h(x_0)=x_0\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0-x_0-1=1+x_0-x_0-1=0$.所以 $f(x)-g(x)\ge 0$.